Corrigés Savoirs Fle. 3

Corrigé Exercice 11

1) $A = \mathbf{2}$ $\quad B = \mathbf{-3x}$ $\quad C = \mathbf{5x}$ $\quad G = \mathbf{2x+3}$ $\quad H = \mathbf{1+3x}$

D *impossible* $\quad E = \mathbf{1-2x}$ $\quad F = e^{2x} \times e^{\ln(3)}$, $F = \mathbf{3e^{2x}}$ $\quad I$ *impossible* $\quad J = 5x \times (-2x)$, $J = -10x^2$

2) $a)$ $2x+1 = \ln 2$ $\quad b)$ $3 - x = \ln 3$ $\quad c)$ $\ln\left(\frac{x}{2}\right) < 0{,}5x - 5$ $\quad d)$ $0{,}1x^2 = \ln(x-1)$

$e)$ $\ln\left(e^x(x+1)\right) \geq 0$
$\Leftrightarrow \ln(e^x) + \ln(x+1) \geq 0$
$\Leftrightarrow x + \ln(x+1) \geq 0$

3) $\boldsymbol{a)}$ $\mathbf{2 - x = e^{-4}}$ $\quad \boldsymbol{b)}$ $\mathbf{5x \leq e^{2x}}$ $\quad \boldsymbol{c)}$ $\mathbf{x - 1 = e^{x+1}}$ $\quad \boldsymbol{d)}$ $\mathbf{\dfrac{1}{x+3} > e^{1-x}}$

4) $A = \ln(e^x) - \ln 2 - (x-3) = x - \ln 2 - x + 3 = \mathbf{3 - \ln 2}$

$B = e^{\ln 6} \times e^{-2\ln 3} = 6 \times \left(e^{\ln 3}\right)^{-2} = 6 \times 3^{-2} = \frac{6}{3^2} = \frac{6}{9} = \mathbf{\frac{2}{3}}$ $\qquad C = \frac{2x}{\ln(e^x)+\ln(1-x)} = \mathbf{\frac{2x}{x+\ln(1-x)}}$

$D = \frac{e^{\ln(2x)-1}}{\ln(2e^{3x})} = \frac{e^{\ln(2x)} \times e^{-1}}{\ln(2)+\ln(e^{3x})} = \frac{2x \times e^{-1}}{\ln(2)+3x} = \mathbf{\frac{2x}{e(\ln 2 + 3x)}}$

I ($\boldsymbol{ln\ e}$♥) Math
$\sqrt{16}$ Ever

Corrigé Exercice 12

1) $e^{x-1} = \frac{1}{3e^x} \Leftrightarrow \ln(e^{x-1}) = \ln\left(\frac{1}{3e^x}\right) \Leftrightarrow x - 1 = -\ln(3e^x)$
$\Leftrightarrow x - 1 = -\ln 3 - x \Leftrightarrow 2x = 1 - \ln 3$ CQFD

2) $1 < \frac{e^x}{x} < e \Leftrightarrow \ln(1) < \ln\left(\frac{e^x}{x}\right) < \ln(e) \Leftrightarrow 0 < \ln(e^x) - \ln(x) < 1$
$\Leftrightarrow 0 < x - \ln x < 1$ CQFD

3) $g(x) = \ln\left(\frac{1}{x^2}\, e^{-\frac{1}{2x}}\right) = \ln\left(e^{-\frac{1}{2x}}\right) - \ln(x^2) = -\frac{1}{2x} - 2\ln x$
$= \frac{-1-4x\ln x}{2x} = -\frac{1+4x\ln x}{2x}$ CQFD

Un peu plus...

Soit l'inéquation :

(I) : $\dfrac{x}{\ln x} - 1 > 2$

Montrer que résoudre (I) revient à résoudre

(I') : $2x + \ln 3 = 1$

Corrigé Exercice 13

Corrigé Partie I

1) $g'(x) = e^x - e^x - xe^x = \boldsymbol{-xe^x}$

2) a. On a $g(0) = 2$ et $g(2) \simeq -6$

g est continue et strictement croissante sur [0 ; 2], avec $g(0) > 0$ et $g(2) < 0$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, **l'équation $\boldsymbol{g(x) = 0}$ admet une unique solution sur [0 ; 2]** (et d'ailleurs sur [0 ; +∞[vu qu'elle y est strictement décroissante et y change de signe)

b. On a $g(1{,}278) > 0$ et $g(1{,}279) < 0$ donc : $\boldsymbol{\alpha \simeq 1{,}28}$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$-x$	$+$	0	$-$
e^x	$+$	|	$+$
$g'(x)$	$+$	0	$-$
$g(x)$	↗	2	↘

c. On sait que $g(\alpha) = 0 \Leftrightarrow e^{\alpha} - \alpha e^{\alpha} + 1 = 0$
$\Leftrightarrow (1-\alpha)e^{\alpha} + 1 = 0 \Leftrightarrow (1-\alpha)e^{\alpha} = -1 \Leftrightarrow \boldsymbol{e^{\alpha} = \frac{-1}{1-\alpha} = \frac{1}{-1+\alpha}}$

3)

x	0	$\boldsymbol{\alpha}$	$+\infty$
$g(x)$	$+$	$\mathbf{0}$	$-$

Corrigé Partie 2

1) $A'(x) = \dfrac{4(e^x+1) - 4xe^x}{(e^x+1)^2} = \dfrac{4(e^x - xe^x + 1)}{(e^x+1)^2} = \dfrac{4g(x)}{(e^x+1)^2}$

Comme le carré du dénominateur est toujours positif, on a bien $A'(x)$ du même signe que $g(x)$

2)

x	0	$\boldsymbol{\alpha}$	$+\infty$
$g(x)$	$+$	$\mathbf{0}$	$-$
$A(x)$	↗	$\boldsymbol{\frac{4\alpha}{e^{\alpha}+1}}$	↘

Corrigé Partie 3

L'aire du rectangle OMPQ est égale à :
$x \times f(x) = \frac{4}{e^x+1} \times x = A(x)$ où A est la fonction étudiée partie 2.

D'après le tableau de variation de A, **elle admet un maximum en $\boldsymbol{x = \alpha}$** (qui est de $\frac{4\alpha}{e^{\alpha}+1}$)