Correction « Plus loin »

Corrigé Exercice 14

1) a. $u_n > S \iff 2n-5>S \iff 2n > S+5 \iff \boldsymbol{n > \frac{S+5}{2}}$

b. Pour tout réel A, on prend $\boldsymbol{n_0 = E\left(\frac{S+5}{2}\right)+1}$ où $E\left(\frac{S+5}{2}\right)$ est la partie entière du nombre $\frac{S+5}{2}$. D'après la question précédente, on a alors, pour $\boldsymbol{n \geq n_0,\ u_n} > S$.

Donc l'intervalle $]S;+\infty[$ contient tous les termes de la suite (u_n) à partir du rang n_0 : on a bien $\boldsymbol{\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty}$

2**) a.** La suite (w_n) est une suite à termes strictement positifs.

On résout donc $0 < w_n < 0{,}1 \iff 0 < \frac{1}{\sqrt{n}} < 0{,}1 \iff \sqrt{n} > \frac{1}{0{,}1}$

$\iff \sqrt{n} > 10 \iff n > 100$

À partir de $\boldsymbol{n = 101}$ on a $\boldsymbol{u_n \in]-0{,}1;0{,}1[}$

De même $0 < \frac{1}{\sqrt{n}} < 10^{-6} \iff n > \left(\frac{1}{10^{-6}}\right)^2 \iff n > 10^{12}$

Donc, pour $\boldsymbol{n \geq 10^{12}+1}$, **on a** $\boldsymbol{u_n \in]-10^{-6};10^{-6}[}$

b. Pour tout **réel positif ε**, on pose $\boldsymbol{n_0 = E\left(\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^2\right)+1}$

donc, pour $n \geq n_0$, on aura $0 < w_n < \varepsilon$ et donc $\boldsymbol{w_n \in]-\varepsilon;\varepsilon[}$ Donc $\boldsymbol{\lim_{n\to+\infty} w_n = 0}$

Un peu plus…

a. La suite (v_n) est à termes négatifs :

Si $\boldsymbol{S > 1}$, l'inégalité est vraie pour tout n.

Si $\boldsymbol{S \leq 1}$ alors $v_n < S \iff 1-n^2 < S$

$\iff n^2 > 1-S \Rightarrow n > \sqrt{1-S}$

b. Pour tout réel $\boldsymbol{S}$:

Si $\boldsymbol{S > 1}$, on a $v_n < S$ pour tout $n \geq 1$

Si $\boldsymbol{S \leq 1}$, on pose $n_0 = E\left(\sqrt{1-S}\right)+1$

Et, d'après la question précédente, on a pour tout $\boldsymbol{n \geq n_0,\ v_n \in]-\infty;S[}$

Donc $\boldsymbol{\lim_{n\to+\infty} v_n = -\infty}$

Corrigé Exercice 15

a. Comme $3 > 1$ on a $\boldsymbol{\lim_{n\to+\infty} 3^n = +\infty}$

b.

n	0	1	2	3	4	5
3^n	1	3	9	27	81	243
$Test$	Vrai	Vrai	Vrai	Vrai	Vrai	Faux

L'algorithme affiche le **nombre 5**, c'est le **rang à partir duquel la suite dépasse le seuil de 100.**

c. Comme $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, pour tout réel A, il existe n_0 tel que $u_n > A$.

Dans l'algorithme, A est le seuil (100 ou 1 000…) et n_0 est le nombre affiché par l'algorithme. **La définition de la limite nous assure de son existence.**

Corrigé Exercice 16

1) a. $\boldsymbol{\lim_{n\to+\infty} u_n = 0}$

b.

n	1	2	3	4	5	6
$\frac{1}{3n^2}$	0,3333	0,0833	0,0370	0,0208	0,0133	0,0092
$Test$	Vrai	Vrai	Vrai	Vrai	Vrai	FAUX

La fonction retourne le **nombre 6**, donc m contient 6 en fin d'exécution. Cette valeur est le **rang $\boldsymbol{n}$ à partir duquel la suite passe sous le seuil de 0,01.**

c. Comme $\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$, pour tout réel ε, il existe n_0 tel que $-\varepsilon < u_n < \varepsilon$.
Dans l'algorithme, $\varepsilon = 10^{-p}$ est le seuil (pour $p = 2$ ou 8…) et n_0 est le nombre affiché par l'algorithme. **La définition de la limite nous assure de son existence.**

2) On définit la suite (v_n) par $v_0 = 4$ et pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = \frac{3}{4}v_n + 2$

a. B3 : « **=**$\boldsymbol{\frac{3}{4} * B2 + 2}$ ». Il semble la suite (v_n) **tende vers 8**

b. D'après la feuille de calcul, on a $|u_{13} - 8| < 0{,}1$. Donc **l'algorithme va afficher la valeur** $\mathbf{13}$

Correction « Un sujet de bac »

1. a.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
u_n	2	3,4	2,18	1,19	0,61	0,31	0,16	0,08	0,04

b. La suite (u_n) a l'air d'être décroissante

3. a. $v_{n+1} = u_{n+1} - 10 \times 0{,}5^{n+1} = \frac{1}{5}u_n + 3 \times 0{,}5^n - 10 \times 0{,}5 \times 0{,}5^n$ Or $u_n = v_n + 10 \times 0{,}5^n$
Donc $v_{n+1} = \frac{1}{5}(v_n + 10 \times 0{,}5^n) + 3 \times 0{,}5^n - 5 \times 0{,}5^n = \frac{1}{5}v_n + 2 \times 0{,}5^n - 2 \times 0{,}5^n = \frac{1}{5}v_n$
La suite (v_n) est bien une suite géométrique de raison $\frac{1}{5}$ et de premier terme :
$v_0 = u_0 - 10 \times 0{,}5^0 = 2 - 10 = \mathbf{-8}$

b. On a : $\boldsymbol{v_n} = v_0 \times q^n = \mathbf{-8} \times \left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{5}}\right)^{\boldsymbol{n}}$ Et donc : $\boldsymbol{u_n} = v_n + 10 \times 0{,}5^n = \mathbf{-8} \times \left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{5}}\right)^{\boldsymbol{n}} + \mathbf{10} \times \mathbf{0{,}5}^{\boldsymbol{n}}$

c. Comme $\frac{1}{5} \in]-1;1[$ et que $0{,}5 \in]-1;1[$, on a $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n = \lim_{n \to +\infty} 0{,}5^n = 0$
Donc par somme de limite, on a $\boldsymbol{\lim_{n \to +\infty} u_n = 0}$

4. Traitement :
Tant que $\boldsymbol{u} > 0{,}01$
n prend la valeur $\boldsymbol{n+1}$
u prend la valeur $\boldsymbol{\frac{1}{5}u + 3 \times 0{,}5^{n-1}}$

(Attention, vu que n passe à $n+1$ avant le calcul du terme suivant, il faut bien mettre le 0,5 à la puissance $n-1$… il aurait mieux valu calculer u d'abord, et changer n ensuite… mais bon… on va pas refaire le sujet)