Savoir Si. 5 : Limite de suites monotones bornées

Entraînement 1

n	Un
0	1
1	2,645751
2	3,455033
3	3,790132
4	3,92051
5	3,970079
6	3,988764
7	3,995784

1) On donne $u_{n+1} = \sqrt{3u_n + 4}$ et $u_0 = 1$

a) On donne ci-contre les premiers termes de la suite.
Conjecturez un majorant de la suite pour tout entier naturel n
et démontrer cette conjecture.

b) On admet que la suite (u_n) est croissante.
La suite (u_n) est-elle convergente ? Justifier.

2) On donne $w_{n+1} = \frac{7}{2} - \frac{3}{4}w_n$ et $w_0 = 4$. On admet que la suite (w_n) converge vers un réel L.
Déterminer cette limite.

Entraînement 2

n	An
0	
1	5
2	1
3	-1,4
4	-2,84
5	-3,704
6	-4,2224
7	-4,53344
8	-4,72006
9	-4,83204

1) On donne $a_{n+1} = \frac{3}{5}a_n - 2$ et $a_1 = 5$

a) On donne ci-contre les premiers termes de la suite.
Conjecturez le sens de variation de la suite et démontrer cette conjecture.

b) On admet que $a_n \geq -5$ pour tout entier naturel $n \geq 1$
La suite (a_n) est-elle convergente ? Justifier.

2) On donne $b_{n+1} = 2 + \dfrac{4}{b_n}$ et $b_0 = 5$.
On admet que $b_n > 0$ pour tout entier naturel et que la suite (b_n) converge vers un réel L.
Déterminer la limite L.

Entraînement 3

On donne $u_{n+1} = 0{,}1u_n^2 - 3$ et $u_0 = -4$

a) Soit la fonction $f(x) = 0{,}1x^2 - 3$.
Déterminer son tableau de variation, et en déduire que, pour $x \in [-4; 0]$, on a $-3 \leq f(x) \leq -1{,}4$

b) Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a $-4 \leq u_n \leq 0$

c) On admet que la suite (u_n) est décroissante. Justifier que la suite (u_n) est convergente vers un réel l.

d) Déterminer la limite l.

Entraînement 4

1) On donne $a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + 4$ et $a_0 = 3$

a) On donne ci-contre les premiers termes de la suite.
Conjecturez le sens de variation de la suite.
Démontrer cette conjecture.

n	An
0	3
1	5,5
2	6,75
3	7,375
4	7,6875
5	7,84375
6	7,921875
7	7,960938
8	7,980469
9	7,990234
10	7,995117

b) On admet que $a_n \leq 8$ pour tout entier naturel n
La suite (a_n) est-elle convergente ? Justifier.

2) On donne $b_{n+1} = 5 - \frac{2b_n}{3}$ et $b_0 = 1$. On admet que la suite (b_n) converge vers un réel L.
Déterminer cette limite.

Entraînement 5

1) On donne $u_{n+1} = 2 + \frac{u_n}{2}$ et $u_0 = 10$

a) On donne ci-contre les premiers termes de la suite. Conjecturez le sens de variation de la suite et sa limite.

n	Un
0	10
1	7
2	5,5
3	4,75
4	4,375
5	4,1875
6	4,09375
7	4,046875
8	4,023438

b) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $4 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 10$

c) La suite (u_n) est-elle convergente ? Justifier.

2) On donne $a_{n+1} = -1 + \frac{2}{a_n}$ et $a_1 = -4$.
On admet que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $a_n < 0$ et que la suite (a_n) converge vers un réel L.
Déterminer cette limite.

Entraînement 6

On donne $u_{n+1} = 2 - \frac{1}{u_n}$ et $u_0 = 2$

a) On donne ci-contre les premiers termes de la suite.
Conjecturez le sens de variation de la suite ainsi qu'un majorant et un minorant.

n	Un
0	2
1	1,5
2	1,333333
3	1,25
4	1,2
5	1,166667
6	1,142857
7	1,125
8	1,111111
9	1,1
10	1,090909
11	1,083333
12	1,076923

b) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $1 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 2$

c) Justifier que la suite (u_n) admet une limite.

d) Déterminer cette limite (bien justifier)

Corrigé Savoir Si. 5

Corrigé Entraînement 1

1) a) Il semblerait qu'on aie : $\boldsymbol{u_n \leq 4}$

Initialisation : $u_0 = 1 \leq 4$ **Alors** $\boldsymbol{u_n \leq 4}$ **est vraie pour** $\boldsymbol{n = 0}$

Hd : **Si** $\boldsymbol{u_n \leq 4}$ **est vraie pour** $\boldsymbol{n = p}$**, alors on a :** $u_p \leq 4 \;\Rightarrow\; 3u_p + 4 \leq 16$

$\Rightarrow\; \sqrt{3u_n + 4} \leq \sqrt{16} \;\Rightarrow\; u_{p+1} \leq 4 \;\Rightarrow$ **Donc** $\boldsymbol{u_n \leq 4}$ **est vraie pour** $\boldsymbol{n = p + 1}$

Ccl : $\forall n \in \mathbb{N}$, on a $\boldsymbol{u_n \leq 4}$ **⇒ La suite est majorée**

b) La suite (u_n) est **croissante** et **majorée par** 4, donc, d'après le **théorème des suites monotones bornées**, la suite (u_n) **est convergente.**

2) On a $\lim\limits_{n\to+\infty} w_{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = L$ Alors $\boldsymbol{L = \frac{7}{2} - \frac{3}{4}L} \;\Leftrightarrow\; L + \frac{3}{4}L = \frac{7}{2} \;\Leftrightarrow\; \frac{7}{4}L = \frac{7}{2} \;\Leftrightarrow\; L = \frac{4}{2} = 2$

On a donc $\boldsymbol{\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 2}$

Corrigé Entraînement 2

1) a) La suite **semble être décroissante**

Initialisation : $a_2 = \frac{3}{5} \times 5 \pm 2 = 1 < 5$ **Alors** $\boldsymbol{a_{n+1} \leq a_n}$ **est vraie pour** $\boldsymbol{n = 0}$

Hd : **Si** $\boldsymbol{a_{n+1} \leq a_n}$ **est vraie pour** $\boldsymbol{n = p}$**, alors on a :** $a_{p+1} \leq a_p \Leftrightarrow \frac{3}{5}a_{p+1} - 2 \leq \frac{3}{5}a_p - 2 \;\Leftrightarrow\; a_{p+2} \geq a_{p+1}$

Donc $\boldsymbol{a_{n+1} \leq a_n}$ **est vraie pour** $\boldsymbol{n = p + 1}$

Ccl : $\forall n \in \mathbb{N}$, on a $\boldsymbol{a_{n+1} \leq a_n}$ **⇒ La suite est décroissante**

b) La suite (a_n) est **décroissante** et **minorée par** -5, donc, d'après le **théorème des suites monotones bornées**, la suite (a_n) **est convergente.**

2) On a $\lim\limits_{n\to+\infty} b_{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} b_n = L$ Alors $\boldsymbol{L = 2 + \frac{4}{L}} \;\Leftrightarrow\; L^2 = 2L + 4 \;\Leftrightarrow\; L^2 - 2L - 4 = 0$

$\Delta = 4 + 16 = 20$ et $L_1 = \frac{2+\sqrt{20}}{2} = 1 + \sqrt{5}$ et $L_2 = \frac{2-\sqrt{20}}{2} = 1 - \sqrt{5}$

Or, la limite est forcément positive, vu que tous ses termes sont positifs. Donc $\boldsymbol{\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 1 + \sqrt{5}}$

Corrigé Entraînement 3

a) $f'(x) = 0{,}2x$

Donc

x	$-\infty$ -4 0 $+\infty$
$f'(x) = 0{,}2x$	– | – 0 +
$f(x)$	↘ **−1,4** ↘ **−3** ↗

On a bien, pour tout $x \in [-4; 0]$ l'encadrement $f(x) \in [-3; -1{,}4]$

b) Initialisation : $u_0 = -4$ donc $u_0 \in [-4; 0]$ ⇒**Alors $-4 \leq u_n \leq 0$ est vraie pour $n = 0$**

Hd : **Si $-4 \leq u_n \leq 0$ est vraie pour $n = p$, alors on a :** $-4 \leq u_p \leq 0$

d'après la question précédente, comme f est décroissante sur l'intervalle $[-4; 0]$, on a alors : $f(-4) \geq f(u_p) \geq f(0) \Leftrightarrow -1{,}4 \geq u_{p+1} \geq -3$

Or on a $0 \geq -1{,}4$ à gauche et $-3 \geq -4$ à droite, donc : $0 \geq u_{p+1} \geq -4$

⇒ **Donc $-4 \leq u_n \leq 0$ e st vraie pour $n = p + 1$**

Ccl : $\forall n \in \mathbb{N}$, on a **$-4 \leq u_n \leq 0$ ⇒ La suite est bornée**

c) La suite (u_n) est **décroissante** et **minorée par −4**, donc, d'après le **théorème des suites monotones bornées**, la suite (u_n) **est convergente.**

d) On a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = L$ Alors $L = 0{,}1L^2 - 3 \Leftrightarrow 0{,}1L^2 - L - 3 = 0 \Leftrightarrow L^2 - 10L - 30 = 0$

$\Delta = 220$ et $L_1 = \frac{10+\sqrt{220}}{2} = 5 + \sqrt{55}$ et $L_2 = 5 - \sqrt{55}$

Or, la limite est forcément négative, puisque tous les termes de la suite sont négatifs.

Donc $\boldsymbol{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 5 - \sqrt{55}}$

Corrigé Entraînement 4

1) a) La suite **semble être croissante**

Initialisation : $a_1 = \frac{1}{2} \times 3 + 4 = \frac{11}{2} > 3$ **Alors $a_{n+1} \geq a_n$ est vraie pour $n = 0$**

Hd : **Si $a_{n+1} \geq a_n$ est vraie pour $n = p$, alors on a :** $a_{p+1} \geq a_p \Leftrightarrow \frac{1}{2}a_{p+1} \geq \frac{1}{2}a_p$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}a_{p+1} + 4 \geq \frac{1}{2}a_p + 4 \Leftrightarrow a_{p+2} \geq a_{p+1}$ **Donc $a_{n+1} \geq a_n$ est vraie pour $n = p + 1$**

Ccl : $\forall n \in \mathbb{N}$, on a **$a_{n+1} \geq a_n$ ⇒ La suite est croissante**

b) La suite (a_n) est **croissante** et **bornée par** 8, donc, d'après le **théorème des suites monotones bornées**, la suite (a_n) **est convergente.**

2) On a $\lim\limits_{n\to+\infty} b_{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} b_n = L$ Alors $\boldsymbol{L = 5 - \frac{2}{3}L} \Leftrightarrow L + \frac{2}{3}L = 5 \Leftrightarrow \frac{5}{3}L = 5 \Leftrightarrow L = 5 \times \frac{3}{5} = 3$

On a donc $\boldsymbol{\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 3}$

Corrigé Entraînement 5

1) a) La suite **semble être décroissante et converger vers 4**

b) Initialisation : $u_1 = 2 + \frac{10}{2} = 7$ donc on a bien $4 \leq u_1 \leq u_0 \leq 10$

Alors $4 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 10$ est vraie pour $n = 0$

Hd : **Si $4 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 10$ est vraie pour $n = p$, alors on a :** $4 \leq u_{p+1} \leq u_p \leq 10$

$\Leftrightarrow \ 2 \leq \frac{u_{p+1}}{2} \leq \frac{u_p}{2} \leq 5 \ \Leftrightarrow \ 4 \leq 2 + \frac{u_{p+1}}{2} \leq 2 + \frac{u_p}{2} \leq 7$ et $7 \leq 10$

Donc on a bien $4 \leq u_{p+2} \leq u_{p+1} \leq 10 \Rightarrow$ **Donc $4 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 10$ est vraie pour $n = p + 1$**

Ccl : $\forall n \in \mathbb{N}$, on a $\boldsymbol{4 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 10}$

b) D'après ce qui précède, la suite (u_n) est **décroissante** et **minorée par 4**, donc, d'après le **théorème des suites monotones bornées**, la suite (u_n) **est convergente.**

2) On a $\lim\limits_{n\to+\infty} a_{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n = L$ Alors $\boldsymbol{L = -1 + \frac{2}{L}} \Leftrightarrow L^2 = -L + 2 \Leftrightarrow L^2 + L - 2 = 0$

$\Rightarrow$ $\Delta = 9$ Il y aurait deux limites possibles $L_1 = \frac{-1+3}{2} = 1$ et $L_2 = \frac{-1-3}{2} = -2$

Mais la suite est à terme négatifs, donc sa limite ne peut être positive. On a donc $\boldsymbol{\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = -2}$

Corrigé Entraînement 6

a) La suite **semble être décroissante** et il semble que $\boldsymbol{1 \leq u_n \leq 2}$

b) Initialisation : $u_1 = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ On a bien $1 \leq u_1 \leq u_0 \leq 2$

Alors $1 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 2$ est vraie pour $n = 0$

Hd : **Si $1 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 2$ est vraie pour $n = p$, alors on a :** $1 \geq \frac{1}{u_{p+1}} \geq \frac{1}{u_p} \geq \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \ -1 \leq -\frac{1}{u_{p+1}} \leq -\frac{1}{u_p} \leq -\frac{1}{2} \ \Leftrightarrow \ 2 - 1 \leq 2 - \frac{1}{u_{p+1}} \leq 2 - \frac{1}{u_p} \leq 2 - \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \ 1 \leq u_{p+2} \leq u_{p+1} \leq \frac{3}{2} \leq 2$ **Donc $1 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 2$ est vraie pour $n = p + 1$**

Ccl : $\forall n \in \mathbb{N}$, on a $\boldsymbol{1 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 2}$

c) La suite (u_n) est **décroissante** et **minorée par 1**, donc, d'après le **théorème des suites monotones bornées**, la suite (u_n) **est convergente.**

d) On a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = L$ avec $L \geq 1$ car $u_n \geq 1$

Alors $\boldsymbol{L = 2 - \frac{1}{L}} \Leftrightarrow L^2 = 2L - 1 \Leftrightarrow L^2 - 2L + 1 = 0 \Leftrightarrow (L-1)^2 = 0 \Leftrightarrow L = 1$ Donc $\boldsymbol{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1}$