Savoir Nc. 3 - Équations d'inconnue complexe

Entraînement 1

1) Résoudre dans Ê :

a) $z - 4i = 2iz + 1$ **b)** $(z+3)(z+3-2i) = 0$ **c)** $i + 2iz = 2 - i\bar{z}$ **d)** $\begin{cases} z + 3z' = 6 \\ 2iz + 3z' = -3i \end{cases}$

2) Résoudre dans Ê:

a) $z^2 = -9$ **b)** $z^2 - 4z + 5 = 0$ **c)** $(z-2i)(z^2+5) = 0$ **d)** $z^4 + 3z^2 - 4 = 0$

Entraînement 2

1) Résoudre dans Ê:

a) $z - 2i = 2 + i + iz$ **b)** $(z-3i)(z-3+i) = 0$ **c)** $i(2z+\bar{z}) = -3+3i$ **d)** $\begin{cases} z - 3z' = 7i \\ 2z + z' = 7 \end{cases}$

2) Résoudre dans Ê:

a) $2z^2 + 1 = -5$ **b)** $4z^2 - 4z + 17 = 0$ **c)** $z + 2 + \frac{2}{z} = 0$ **d)** $z^4 - 3z^2 - 4 = 0$

Corrigé Savoir N°.3

Corrigé Entraînement 1

1) a) $z-4i=2iz+1 \Leftrightarrow z(1-2i)=1+4i \Leftrightarrow z=\frac{1+4i}{1-2i}=\frac{(1+4i)(1+2i)}{1+4}=\frac{1+2i+4i+8i^2}{5}=\frac{-7+6i}{5}=\boldsymbol{-\frac{7}{5}+\frac{6}{5}i}$

b) $(z+3)(z+3-2i)=0 \Leftrightarrow z+3=0 \ ou\ z+3-2i \Leftrightarrow z=-3 \ ou\ z=-3+2i$

$\Rightarrow S=\{\boldsymbol{-3;-3+2i}\}$

c) Soit $z=x+iy$ on a : $i+2iz=2-i\bar{z} \Leftrightarrow i+2i(x+iy)=2-i(x-iy)$
$\Leftrightarrow -2y+i(1+2x)=2-y-ix$ Les parties réelles sont égales entre elles, ainsi que les parties imaginaires
$\Leftrightarrow \begin{cases}-2y=2-y\\1+2x=-x\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=-2\\x=-\frac{1}{3}\end{cases} \Leftrightarrow z=-\frac{1}{3}-2i \Rightarrow \boldsymbol{S}=\left\{\boldsymbol{-\frac{1}{3}-2i}\right\}$

d) $\begin{cases}z+3z'=6\\2iz+3z'=-3i\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}3z'=6-z\\2iz+(6-z)=-3i\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}3z'=6-z\\z(-1+2i)=-6-3i\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}3z'=6-z\\z=\frac{-6-3i}{-1+2i}\end{cases}$

Or on a $z=\frac{-6-3i}{-1+2i}=\frac{(-6-3i)(-1-2i)}{1+4}=\frac{6+12i+3i+6i^2}{5}=\frac{-15i}{5}=-3i$

Donc $\Leftrightarrow \begin{cases}3z'=6-(-3i)\\z=-3i\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}3z'=6+3i\\z=-3i\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\boldsymbol{z'=2+i}\\\boldsymbol{z=-3i}\end{cases}$

2) a) $z^2=-9$
$\Leftrightarrow z=-3i$ ou $z=3i$
$\Rightarrow \Rightarrow \boldsymbol{S}=\{\boldsymbol{-3i\,;3i}\}$

b) $z^2-4z+5=0$ et $\Delta=-4$
2 solutions complexes conjuguées
$z_1=\frac{4+i\sqrt{4}}{2}=2+i$ et $z_2=2-i$
$\Rightarrow \boldsymbol{S}=\{\boldsymbol{2+i;2-i}\}$

c) $(z-2i)(z^2+5)=0$
$\Leftrightarrow z-2i=0 \ ou\ z^2+5=0$
$\Leftrightarrow z=2i \ ou\ z^2=-5$
$\Leftrightarrow z=-i\sqrt{5} \ ou\ z=i\sqrt{5}$
$\Rightarrow \boldsymbol{S}=\{\boldsymbol{2i;-i\sqrt{5};i\sqrt{5}}\}$

d) $z^4+3z^2-4=0$ Changement de variable $\mathcal{Z}=z^2$ donc $\mathcal{Z}^2+3\mathcal{Z}-4=0$ avec $\Delta=25$
2 solutions réelles $\mathcal{Z}_1=\frac{-3+5}{2}=1$ et $\mathcal{Z}_2=\frac{-3-5}{2}=-4$
On a donc $z^2=1 \Leftrightarrow z=1 \ ou\ z=-1$ et $z^2=-4 \Leftrightarrow z=-2i \ ou\ z=2i \Rightarrow \boldsymbol{S}=\{\boldsymbol{-1;1;-2i;2i}\}$

Corrigé Entraînement 2

1) a) $z-2i=2+i+iz$
$\Leftrightarrow z-iz=2+3i$
$\Leftrightarrow z(1-i)=2+3i$
$\Leftrightarrow z=\frac{2+3i}{1-i}=\frac{(2+3i)(1+i)}{1+1}=\frac{2+2i+3i-3}{2}=-\frac{1}{2}+\frac{5}{2}i$
$\boldsymbol{S}=\left\{\boldsymbol{-\frac{1}{2}+\frac{5}{2}i}\right\}$

b) $(z-3i)(z-3+i)=0$
$\Leftrightarrow z-3i=0$ ou $z-3+i=0$
$\Leftrightarrow z=3i$ ou $z=3-i$
$\boldsymbol{S}=\{\boldsymbol{3i;3-i}\}$

c) On pose $z=x+iy$ alors $i(2z+\bar{z})=-3+3i \Leftrightarrow i(2x+2iy+x-iy)=-3+3i$
$\Leftrightarrow i(3x+iy)=-3+3i \Leftrightarrow -y+3ix=-3+3i \Leftrightarrow \begin{cases}-y=-3\\3x=3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=3\\x=1\end{cases} \Rightarrow \boldsymbol{S}=\{\boldsymbol{1+3i}\}$

d) $\begin{cases}z-3z'=7i\\2z+z'=7\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}z=7i+3z'\\2(7i+3z')+z'=7\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}z=7i+3z'\\7z'=7-14i\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}z=7i+3(1-2i)\\z'=1-2i\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}z=3+i\\\boldsymbol{z'=1-2i}\end{cases}$

a) $2z^2+1=-5$

$\Leftrightarrow z^2=-\frac{6}{2}=-3$

$\Leftrightarrow \ z=-i\sqrt{3}$ ou $z=i\sqrt{3}$

$\boldsymbol{S}=\{-\boldsymbol{i}\sqrt{\mathbf{3}};\boldsymbol{i}\sqrt{\mathbf{3}}\}$

b) $4z^2-4z+17=0$ avec $\Delta=16-272=-256$

Deux solutions complexes conjuguées :

$z_1=\frac{-(-4)+i\sqrt{256}}{2\times 4}=\frac{4+16i}{8}=\frac{1}{2}+2i$ et $z_2=\frac{1}{2}-2i$

$\boldsymbol{S}=\left\{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}+\mathbf{2}\boldsymbol{i};\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}-\mathbf{2}\boldsymbol{i}\right\}$

c) $z+2+\frac{2}{z}=0 \Leftrightarrow z^2+2z+2=0$ et $\Delta=-4$ Deux solutions complexes conjuguées :

$z_1=\frac{-2+i\sqrt{4}}{2}=-1+i$ et $z_2=-1-i$ $\Rightarrow$ $\boldsymbol{S}=\{-\mathbf{1}-\boldsymbol{i};-\mathbf{1}+\boldsymbol{i}\}$

d) $z^4-3z^2-4=0$ Changement de variable : on pose $\mathcal{Z}=z^2$ on obtient l'équation $\mathcal{Z}^2-3\mathcal{Z}-4=0$

avec $\Delta=9+16=25$ Donc deux solutions réelles : $\mathcal{Z}=\frac{3+5}{2}=4$ et $\mathcal{Z}=\frac{3-5}{2}=-1$

Ce qui donne deux nouvelles équations : $z^2=4$ et $z^2=-1$

$\Leftrightarrow z_1=-2$ ou $z_2=2$ et $z_3=-i$ ou $z_4=i$

$\boldsymbol{S}=\{-\mathbf{2};\mathbf{2};-\boldsymbol{i};\boldsymbol{i}\}$