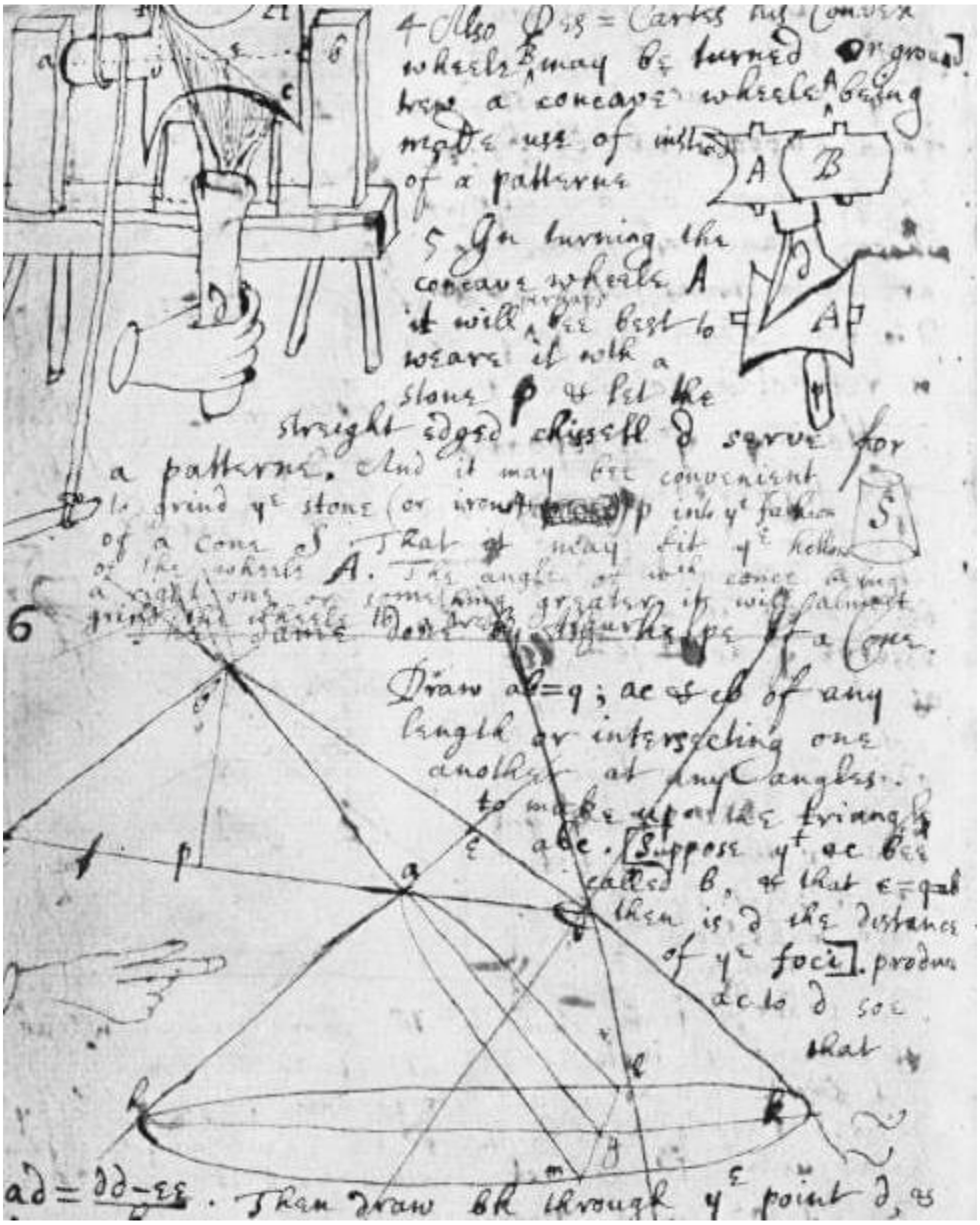
1 ère Spé

Dérivées de fonctions

Savoirs Df

Manuscrit
D'Isaac Newton



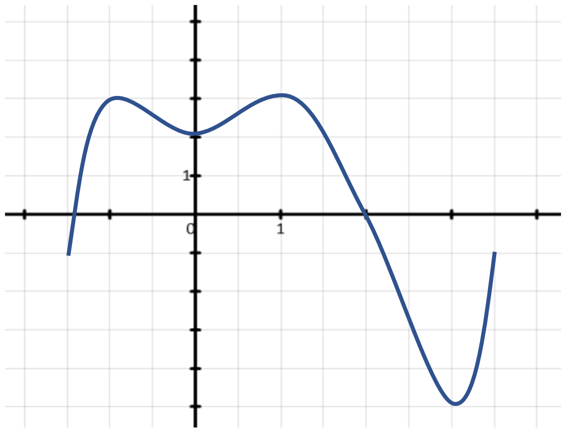
Entraînements

Sujet de préparation

Savoir Df. 1

1) Dans chaque cas, déterminer le tableau de signe de la dérivée de f

a)



b)

x	$-\infty$		-5		0		6		$+\infty$
$f(x)$		↘	-1	↗	9	↘	‖	↘	

2) Dans chaque cas, déterminer le sens de variation de la fonction g

a)

x	$-\infty$		-6		-2			1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	$\mathbf{0}$	$+$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$		$\mathbf{0}$	$-$	

b)

x	$-\infty$		-1		4		6		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	$\mathbf{0}$	$-$	$\|\|$	$+$	$\mathbf{0}$	$-$	

Savoir Df. 2

1) On définit sur $\mathbb{R}$ une fonction g par : $g(x) = -x^3 + 5x^2 + 8x - 15$

Ainsi que sa fonction dérivée g' par : $g'(x) = -3x^2 + 10x + 8$

Déterminer le tableau de variation complet de g sur $\mathbb{R}$

2) Soit f la fonction définie sur $[0; 2]$ par : $f(x) = xe^{-x} - 1$. On donne sa dérivée : $f'(x) = (1-x)e^{-x}$.
Montrer que f admet un maximum sur $[0; 2]$ et donner sa valeur exacte.

Savoir Df. 3

Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

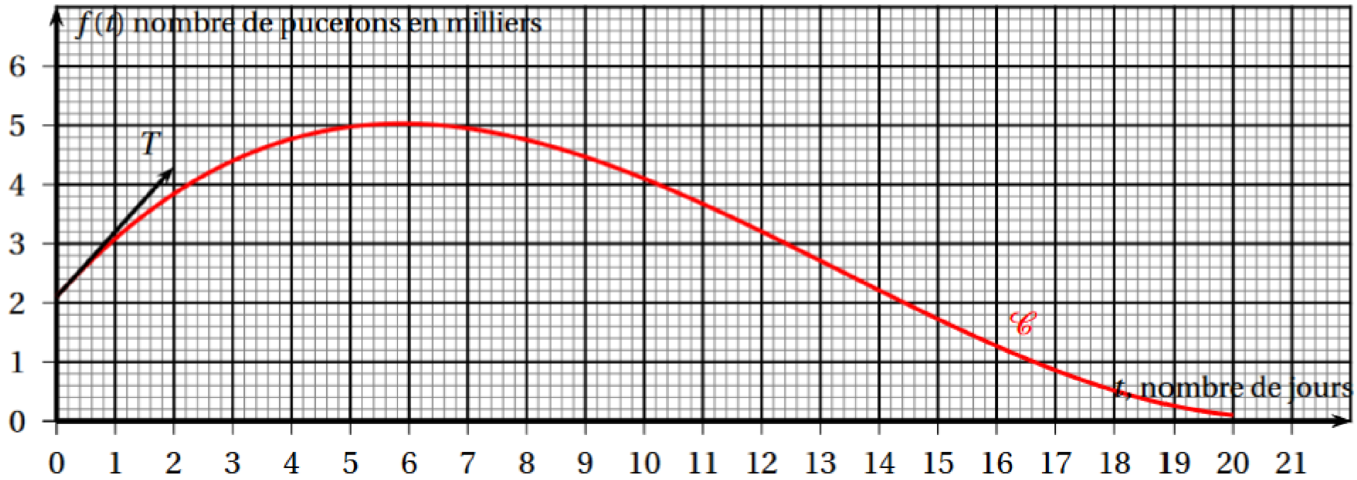
$f(x) = -3x^4 + x^3 + 4x - 1$ $\qquad g(x) = \dfrac{5}{2x} + \dfrac{x}{4}$ $\qquad h(x) = 3x - 10e^x$ $\qquad i(x) = 4 - \dfrac{x^3}{6} - x$

Type bac

Des pucerons envahissent une roseraie.
On introduit alors des coccinelles, prédatrices des pucerons, à l'instant $t = 0$, et on s'intéresse à l'évolution du nombre de pucerons à partir de cet instant et sur une période de 20 jours.

Partie A

Dans le repère ci-dessous, on a tracé la courbe $\mathscr{C}$ représentant le nombre de milliers de pucerons en fonction du nombre de jours écoulés depuis l'introduction des coccinelles.



Déterminer par lecture graphique le nombre de pucerons à l'instant où l'on introduit les coccinelles puis le nombre maximal de pucerons sur la période de 20 jours.

Partie B

On modélise l'évolution du nombre de pucerons par la fonction f définie, pour tout t appartenant à l'intervalle [0 ; 20], par :

$$f(t) = 0{,}003t^3 - 0{,}12t^2 + 1{,}1t + 2{,}1$$

où t représente le nombre de jours écoulés depuis l'introduction des coccinelles et $f(t)$ le nombre de pucerons en milliers.

1. Déterminer $f'(t)$ pour tout t appartenant à l'intervalle [0 ; 20] où f' désigne la dérivée de la fonction f .

2. Dresser le tableau de signes de $f'(t)$ sur l'intervalle [0 ; 20]. On donnera les valeurs arrondies au centième.

3. En déduire le tableau des variations de la fonction f sur l'intervalle [0 ; 20]. Préciser les images des valeurs de t apparaissant dans le tableau.

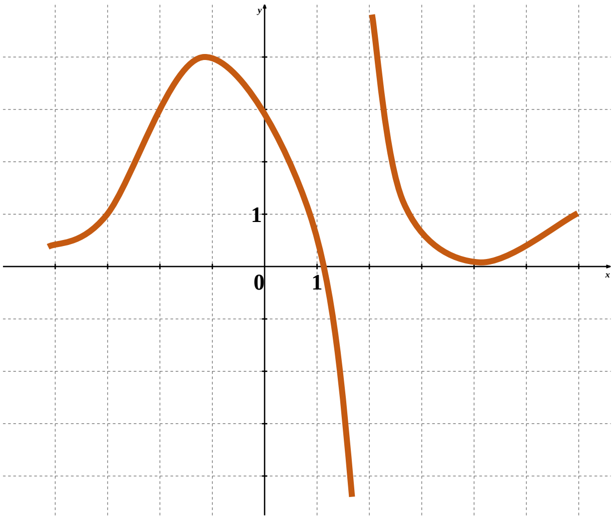
Entraînement par savoir

Savoir Df. 1 : Lien signe f' et variation f

Entraînement n°1

1) Dans chaque cas, déterminer le tableau de signe de la dérivée de f

a)



b)

x	$-\infty$		-5		0		6		$+\infty$
$f(x)$		↗	4	↘	-1	→	-1	↗	

2) Dans chaque cas, déterminer le sens de variation de la fonction g

a)

x	$-\infty$		-2		3		7		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	**0**	$-$	**0**	$-$	**0**	$+$	

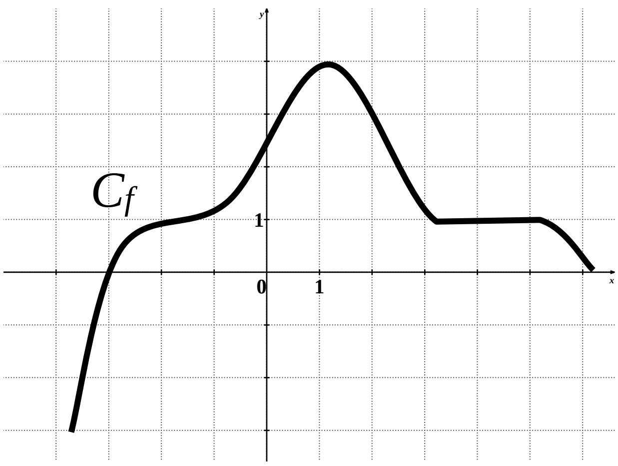
b)

x	0		4		7		$+\infty$
$g'(x)$	**0**	$-$	**0**	$+$	$\Vert$	$-$	

Entraînement n°2

1) Dans chaque cas, déterminer le tableau de signe de la dérivée f' de f

a)



b)

x	$-\infty$		-4		2		5		7		12		$+\infty$
$f(x)$		↗	0	↗	8	↘	2	↗	4	↘	0	↘	

2) Dans chaque cas, déterminer le sens de variation de la fonction g

a)

x	$-\infty$		-7		-1		3		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	**0**	$+$	$\Vert$	$+$	**0**	$-$	

b)

x	$-\infty$		-5		-1		6		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	**0**	**0**	**0**	$-$	**0**	$+$	

Savoir Df. 2 : Étude à partir de la dérivée

Entraînement n°1

1) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (3-2x)e^{x^2}$
et sa dérivée $g'(x) = (-4x^2+6x-2)e^{x^2}$
Déterminer le tableau de variation complet de la fonction $g(x)$ sur $\mathbb{R}$

2) On définit sur]0 ; 1] la fonction i par : $i(x) = -4x - \frac{1}{x} + 1$
On donne sa dérivée, définie pour tout réel $x \in]0;1]$ non nul, par : $i'(x) = \frac{-4x^2+1}{x^2}$
Déterminer le tableau de variation complet de i sur l'intervalle $]0;1]$

Entraînement n°2

1) On définit sur $\mathbb{R}$ la fonction f par : $f(x) = 4x^3 - 15x^2 + 12x + 10$
Et sa dérivée $f'(x) = 12x^2 - 30x + 12$
Déterminer le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$

2) On définit pour $x \in [0;1[\cup]1;2]$ la fonction $h(x) = \frac{e^{2x-3}}{1-x}$ et on donne sa dérivée : $h'(x) = \frac{3e^{2x-3}}{(1-x)^2}$
Déterminer le tableau de variation complet sur son domaine de définition.

Entraînement n°3

1) Soit g la fonction définie sur $[0;\ +\infty[$ par $g(x) = 2xe^{3-x}$. On donne sa dérivée $g'(x) = (2-2x)e^{3-x}$.
Déterminer le tableau de variation de g sur $[0;\ +\infty[$

2) On définit sur $[1;3]$ la fonction h par : $h(x) = 1 + 2x + \frac{8}{x}$ et on donne sa dérivée $h'(x) = 2 - \frac{8}{x^2}$
a) Mettre l'expression de la dérivée h' au même dénominateur
b) Déterminer le tableau de variation de h sur $[1;3]$

Savoir Df. 3 : Dérivation (1) - Sommes et multiples

Calculer les dérivées des fonctions.

Entraînement n°1

$f(x) = 2x^7 - x^6 + 3x^3 - x + 4$ $\quad g(x) = 4e^x - 8\sqrt{x}$ $\quad h(x) = \dfrac{4}{3x} - \dfrac{3x}{4}$ $\quad i(x) = \dfrac{x^5}{10} + \dfrac{3x^4}{2}$

Entraînement n°2

$j(x) = 0{,}2x^3 - 3{,}4x^2 - 5x - 1$ $\quad k(x) = 3x^2 - \dfrac{e^x}{3}$ $\quad l(x) = \dfrac{1}{2x} - 4$ $\quad m(x) = \dfrac{x^3}{6} - \dfrac{2x^2}{4}$

Entraînement n°3

$a(x) = x^8 - 3x^5 + x - 4e^x$ $\quad b(x) = 3x^3 - \dfrac{9}{x}$ $\quad c(x) = x - \dfrac{\sqrt{x}}{5}$ $\quad d(x) = \dfrac{5x^2}{6} - \dfrac{2}{3x}$

Entraînement n°4

$f(x) = 2 - 5x$ $\quad g(x) = 2(x - e^x)$ $\quad h(x) = \dfrac{1}{3} - \dfrac{3}{x}$ $\quad i(x) = \dfrac{1}{18}x^3 - \dfrac{2x^2}{9} + \dfrac{x}{3}$

Exercices type bac

Exercice 1

On considère la fonction P définie sur l'intervalle [0 ; 5] par

$$P(t) = 100\,t\,e^{-t}$$

1. Calculer $P(0)$ et $P(5)$ (on arrondira à l'unité).

2. À l'aide d'un logiciel de calcul formel, on a obtenu une expression de la dérivée de la fonction P : pour tout réel t de l'intervalle [0 ; 5], $P'(t) = 100(1 - t)e^{-t}$.

a. Utiliser cette expression pour étudier le signe de $P'(t)$ sur l'intervalle [0 ; 5].

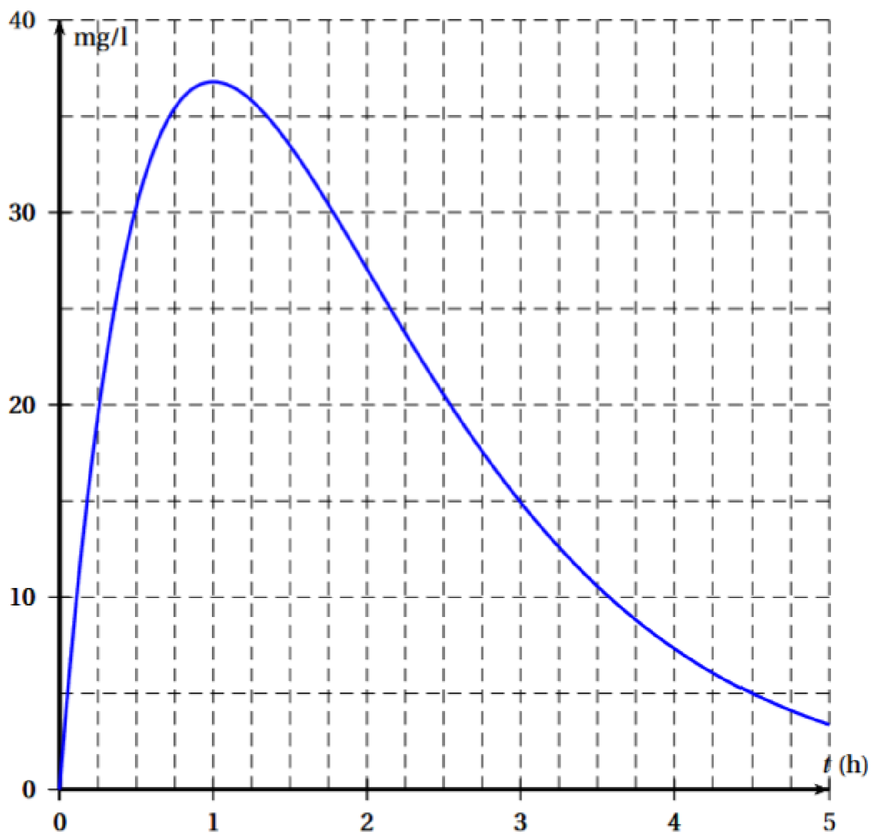
b. En déduire le tableau de variations de la fonction P sur l'intervalle [0 ; 5].

c. Pour quelle valeur de t la fonction P admet-elle un maximum ?
Quelle est la valeur de ce maximum ? (on arrondira à l'unité).

3. Une station pompe l'eau d'une rivière pour la transformer ensuite en eau potable. Lors d'un épisode de pollution, il faut interrompre le pompage en attendant que la vague de pollution soit évacuée par le courant. On étudie ici un épisode de pollution ayant duré 5 heures environ.

La concentration en polluant, exprimée en milligrammes par litre (mg/L) est modélisée par la fonction P définie précédemment, où t est le temps écoulé depuis le début de l'alerte, exprimé en heures.

On donne ci-contre la représentation graphique de la fonction P dans le plan muni d'un repère orthogonal.



Les normes en vigueur indiquent que ce polluant devient dangereux pour la santé si sa concentration dépasse 5 mg/L.
Lors d'un épisode déclaré de pollution dans la rivière et après arrêt du pompage, à partir de combien d'heures peut-on considérer que la pollution ne représente plus de danger pour la santé ?

Exercice 2

Une note de musique est émise en pinçant la corde d'une guitare électrique. La puissance du son émis, initialement de 120 watts, diminue en fonction du temps écoulé après pincement de la corde.
Soit f la fonction définie pour tout réel $t \geq 0$ par :

$$f(t) = 120e^{-0,14t}$$

On admet que $f(t)$ modélise la puissance du son, exprimée en watt, à l'instant t où t est le temps écoulé, exprimé en seconde, après pincement de la corde.
On désigne par f' la fonction dérivée de f . On admet que $f'(t) = -16,8e^{-0,14t}$.

1. Dresser le tableau de variations de la fonction f sur $[0; +\infty[$ et interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

2. Quelle sera la puissance du son, trois secondes après avoir pincé la corde ? Arrondir au dixième.

Exercice 3

Une entreprise vend des smartphones d'un seul modèle « haut de gamme ».
Le service marketing modélise le nombre de smartphones modèle « haut de gamme » vendus par trimestre en fonction du prix de vente x par la fonction N définie par

$$N(x) = 100e^{-2x}$$

Où :

• x est le prix de vente en milliers d'euros d'un smartphone modèle « haut de gamme ».
Le prix du smartphone modèle « haut de gamme » est compris entre 400 € et 2 000 € ; on a donc $x \in [0,4\,;2]$.

• $N(x)$ est le nombre de smartphones modèle « haut de gamme » vendus trimestriellement en millions d'unités.

1. Si le service commercial fixe le prix de vente de ce smartphone modèle « haut de gamme » à 1 000 €, quel sera le nombre de smartphones vendus trimestriellement ? On arrondira le résultat à mille unités.

La recette trimestrielle $R(x)$ est obtenue en multipliant le nombre de smartphones modèle « haut de gamme » vendus par le prix de vente.
On obtient $R(x) = x \times N(x)$ en milliards d'euros.
Le coût de production en milliards d'euros en fonction du nombre de smartphones modèle «haut de gamme» fabriqués est modélisé par la fonction C définie par $C(x) = 0,4 \times N(x)$ où x est le prix de vente en milliers d'euros.
Le bénéfice est obtenu en calculant la différence entre la recette et le coût de production.

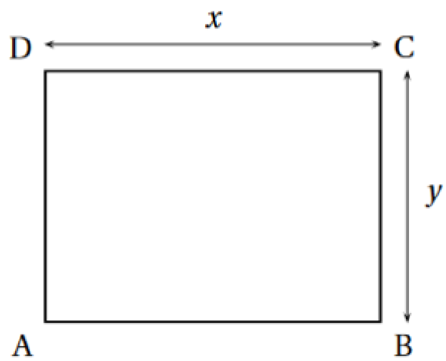
2. Vérifier que le bénéfice trimestriel peut être estimé à 8,120 milliards d'euros pour un prix de vente 1 000 €

3. Montrer que le bénéfice trimestriel s'exprime en milliards d'euros en fonction du prix de vente x en milliers d'euros par : $B(x) = (100x - 40)e^{-2x}$.

4. On admet que pour tout réel $x \in [0,4\,;\,2]$, $B'(x) = (180 - 200x)e^{-2x}$.
Étudier les variations de la fonction B sur l'intervalle [0,4 ; 2].

5. À quel prix faut-il vendre ces smartphones pour assurer un bénéfice maximal ?

Exercice 4



Dans cet exercice, les distances sont exprimées en mètres.

On considère un rectangle ABCD d'aire 49 m² tel que $DC = x$ et $BC = y$.
On admet que les nombres x et y sont strictement positifs.

On souhaite déterminer les dimensions x et y pour que le périmètre de ce rectangle soit minimal.

1. a. Montrer que le périmètre, en mètres, du rectangle ABCD est égal à

$$2x + \frac{98}{x}$$

b. Calculer ce périmètre pour $x = 10$.

Soit f la fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = 2x + \frac{98}{x}$

2. a. Montrer que la fonction dérivée $f'(x)$ est donnée par :

$$f'(x) = \frac{2x^2 - 98}{x^2}$$

b. Déterminer le tableau de variations de la fonction f sur $]0\ ;\ +\infty[$.

3. En déduire les dimensions du rectangle d'aire 49 m² dont le périmètre est minimal.

Exercice 5

Une entreprise produit entre 1 millier et 5 milliers de pièces par jour. Le coût moyen de production d'une pièce, en milliers d'euros, pour x milliers de pièces produites, est donné par la fonction f définie pour tout réel $x \in [1\ ;\ 5]$ par :

$$f(x) = \frac{0{,}5x^3 - 3x^2 + x + 16}{x}$$

1. Calculer le coût moyen de production d'une pièce lorsque l'entreprise produit 2 milliers de pièces.

2. a. Justifier qu'on a, pour tout $x \in [1; 5]$,

$$f(x) = 0{,}5x^2 - 3x + 1 + \frac{16}{x}$$

b. Montrer que f' la fonction dérivée de f, est définie pour tout réel $x \in [1\ ;\ 5]$ par :

$$f'(x) = \frac{x^3 - 3x^2 - 16}{x^2}$$

3. Vérifier que, pour tout réel x, $x^3 - 3x^2 - 16 = (x - 4)(x^2 + x + 4)$

4. En déduire le tableau de variation de f sur [1 ; 5].

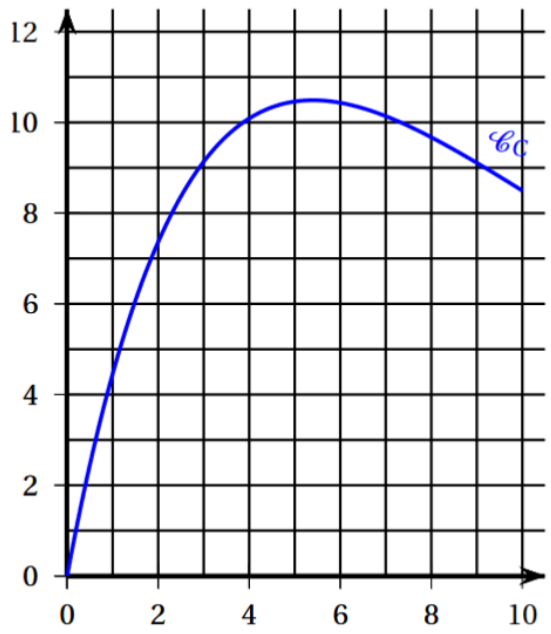
5. Déterminer le nombre de pièces à fabriquer pour que le coût moyen de production d'une pièce soit minimal, ainsi que la valeur de ce coût minimal.

Exercice 6

Une entreprise fabrique chaque jour x tonnes d'un produit. Le coût total mensuel, en milliers d'euros, pour produire chaque jour x tonnes de ce produit est modélisé par la fonction C définie sur l'intervalle [0 ; 10] par :

$$C(x) = (5x - 2)e^{-0,2x} + 2.$$

On a représenté ci-dessous la courbe $\mathscr{C}C$ de la fonction C dans un repère.



1. Par lecture graphique, donner une estimation de la quantité journalière de produit pour laquelle le coût total mensuel est maximal.

2. Le coût marginal C_m qui correspond au supplément de coût total pour la production d'une unité de valeur supplémentaire, est assimilé à la dérivée de la fonction coût total. On admet que le coût marginal C_m est défini sur l'intervalle [0 ; 10] par :

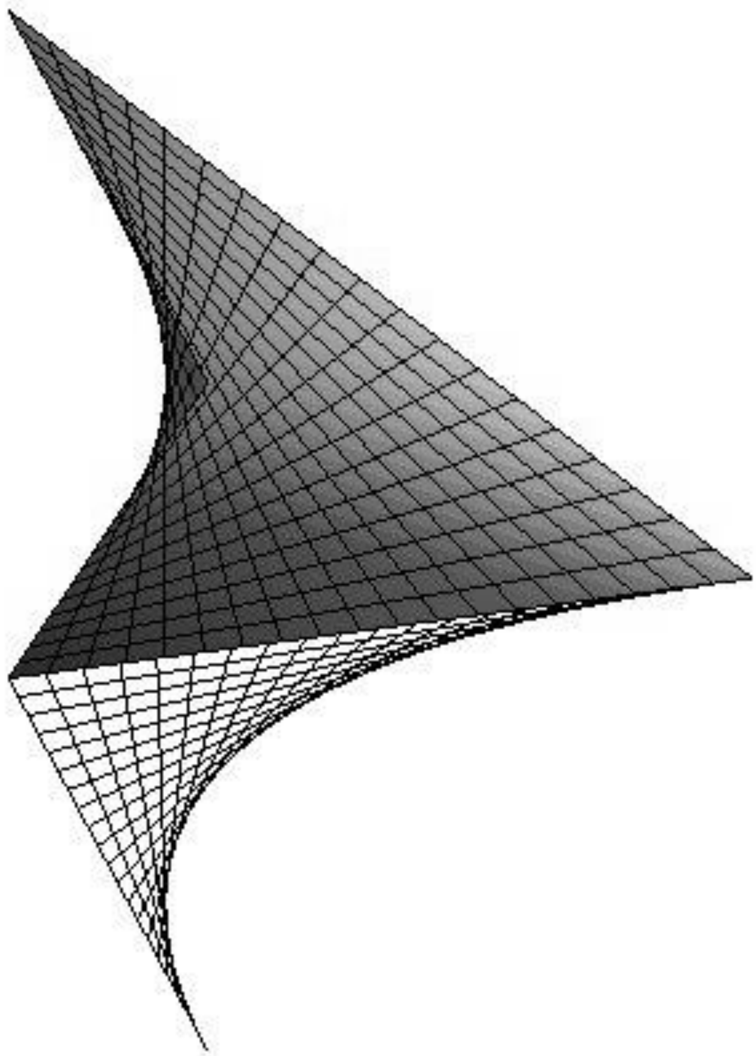
$$C_m(x) = (-x + 5,4)e^{-0,2x}$$

a. Pour quelle quantité de produit fabriqué par jour le coût marginal est-il négatif ?

b. Donner le tableau de variations de la fonction C sur l'intervalle [0 ; 10].

c. Déterminer le coût total mensuel maximal sur l'intervalle considéré. On donnera la valeur arrondie à l'euro près

Corrections



Corrections Sujet de préparation

Savoir Df. 1 : Corrigé

1) a)

x	$-1{,}5$		-1		0		1		3		$3{,}5$
$f(x)$		$+$	$\mathbf{0}$	$-$	$\mathbf{0}$	$+$	$\mathbf{0}$	$-$	$\mathbf{0}$	$+$	

b)

x	$-\infty$		-5		0		6		$+\infty$
$f(x)$		$-$	$\mathbf{0}$	$+$	$\mathbf{0}$	$-$	$\|$	$-$	

2) a)

x	$-\infty$		-6		-2		1		$+\infty$
$g(x)$		↘		↗		→		↘	

b)

x	$-\infty$		-1		4		6		$+\infty$
$g(x)$		↗		↘	$\|$	↗		↘	

Savoir Df. 2 : Corrigé

1) a) pour $g'(x) = -3x^2 + 10x + 8$ on a $\Delta = 196 \Rightarrow x_1 = -\frac{2}{3}$ et $x_2 = 4$

x	$-\infty$		$-\frac{2}{3}$		4		$+\infty$
signe $g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
variation $g(x)$		↘	$-\frac{481}{27}$	↗	33	↘	

2) Avec $f(0) = 0e^{-0} - 1 = -1$, $f(1) = 1e^{-1} - 1 = \frac{1}{e} - 1$ et $f(2) = 2e^{-2} - 1$, on a :

x	0		1		2
$1 - x$		$+$	0	$-$	
e^{-x}		$+$	$\|$	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	-1	↗	$\frac{1}{e} - 1$	↘	$2e^{-2} - 1$

Savoir Df. 3 : Corrigé

$f'(x) = \mathbf{-12x^3 + 3x^2 + 4}$

$g'(x) = \mathbf{\frac{-5}{2x^2} + \frac{1}{4}}$

$h'(x) = \mathbf{3 - 10e^x}$

$i'(x) = -\frac{3x^2}{6} - 1$

$= \mathbf{-\frac{1}{2}x^2 - 1}$

Type bac

Partie A

À l'instant où l'on introduit les coccinelles (pour $t = 0$) on a **2 000 pucerons**
Au maximum, il y aura **5 000 pucerons au 6ème jour** après l'introduction des coccinelles.

Partie B

1. $f'(t) = \mathbf{0,009t^2 - 0,24t + 1,1}$

2 & 3. On a $\Delta = 0{,}24^2 - 4 \times 0{,}009 \times 1{,}1 = 0{,}018$ et $x_1 = \frac{0{,}24-\sqrt{0{,}018}}{2\times 0{,}009} \simeq 5{,}880$ et $x_2 = \frac{0{,}24+\sqrt{0{,}018}}{0{,}018} \simeq 20{,}79$
Donc la seule racine dans l'intervalle $[0; 20]$ est $x_1 \simeq 5{,}88$.
f' est positive à l'extérieur des racines.
(on se permet exceptionnellement de garder les valeurs approchées, car la valeur exacte $\frac{40-10\sqrt{5}}{3}$ est quand même pas jolie à utiliser)

t	0		$x_1 \simeq 5{,}88$		20
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	$2{,}1$	$\nearrow$	$\simeq 5{,}03$	$\searrow$	$0{,}1$

On retrouve bien la valeur lue sur le graphique, aux arrondis près, un maximum d'environ 5 000 pucerons ($f(x_1) = 5{,}028$) au 6ème jour ($x_1 \simeq 5{,}9$)

Corrections Entraînement par savoir

Corrigé Savoir Df. 1

Corrigé Entraînement n°1

1) a)

x	-4		-1		2		4		6
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$	

b)

x	$-\infty$		-5		0		6		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	0	0	$+$	

2) a)

x	$-\infty$		-2		7		$+\infty$
$g(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

b)

x	0		4		7		$+\infty$
$g(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	$\|\|$	$\searrow$	

Corrigé Entraînement n°2

1) a)

x	-4		1		3		5		6
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\rightarrow$		$\searrow$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	0	0	$-$	

b)

x	$-\infty$		2		5		7		$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow$	8	$\searrow$	2	$\nearrow$	4	$\searrow$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

2) a)

x	$-\infty$		-7		-1		3		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	$\|\|$	$+$	0	$-$	
$g(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	$\|\|$	$\nearrow$		$\searrow$	

b)

x	$-\infty$		-5		-1		6		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	0	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\nearrow$		$\rightarrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Corrigé Savoir Df. 2

Corrigé Entraînement n°1

1) Pour $-4x^2+6x-2$, on a $\Delta = 4$; $x_1 = \frac{1}{2}$ et $x_2 = 1$
On a :

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$-4x^2+6x-2$		$-$	0	$+$	0	$-$	
e^{x^2}		$+$	$\vert$	$+$	$\vert$	$+$	
Signe $g'(x)$		$-$	$\mathbf{0}$	$+$	$\mathbf{0}$	$-$	
Variations $g(x)$		$\searrow$	$\boldsymbol{2e^{\frac{1}{4}}}$	$\nearrow$	$\boldsymbol{e}$	$\searrow$	

Avec comme calculs pour les extrema : $g\left(\frac{1}{2}\right) = \left(3 - 2\times\frac{1}{2}\right)e^{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 2e^{\frac{1}{4}}$ et $g(1) = (3-2)e^{1^2} = e$

2) $i'(x) = \dfrac{-4x^2+1}{x^2} \Rightarrow \quad 1 - 4x^2 = (1+2x)(1-2x)$ *ou delta…*

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$1-4x^2$		$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	0	$-$	
x^2		$+$	$\vert$	$+$	0	$+$	$\vert$	$+$	
signe $\boldsymbol{i'(x)}$		$-$	$\mathbf{0}$	$+$	$\Vert$	$+$	$\mathbf{0}$	$-$	
variation $i(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	$\Vert$	$\nearrow$		$\searrow$	

Sur $]0;1]$, avec $i\left(\frac{1}{2}\right) = -4\times\frac{1}{2} - \frac{1}{\frac{1}{2}} + 1 = -2-2+1 = -3$ et $i(1) = -4-1+1 = -4$

On extrait le tableau de variation :

x	0		$\frac{1}{2}$		1
$i(x)$	$\Vert$	$\nearrow$	-3	$\searrow$	-4

Corrigé Entraînement n°2

1) Pour $12x^2 - 30x + 12$ on a $\Delta = 324$ et $x_1 = 2$ et $x_2 = \frac{1}{2}$

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
$\boldsymbol{f'(x)}$		$+$	$\mathbf{0}$	$-$	$\mathbf{0}$	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	$\frac{51}{4}$	$\searrow$	6	$\nearrow$	

2) Avec $h(0) = \frac{e^{-3}}{1}$ et $h(2) = \frac{e^{4-3}}{1-2} = -e$

x	0		1		2
$3e^{2x-3}$		$+$	$\vert$	$+$	
$(1-x)^2$		$+$	0	$+$	
$h'(x)$		$+$	$\mathbf{0}$	$+$	
$h(x)$	e^{-3}	$\nearrow$	$\Vert$	$\nearrow$	$-e$

Corrigé Entraînement n°3

1)

x	0		1		$+\infty$
$2-2x$		$+$	0	$-$	
e^{3-x}		$+$	$\vert$	$+$	
$g'(x)$		$+$	$\mathbf{0}$	$-$	
$g(x)$	0	$\nearrow$	$\mathbf{2e^2}$	$\searrow$	

2) a) $h'(x) = 2 - \frac{8}{x^2} = \frac{2x^2-8}{x^2}$ avec, pour $2x^2 - 8 = 2(x+2)(x-2)$, ou $\Delta = 64$

b)

x	1		2		3
$2x^2-8$		$-$	0	$+$	
x^2		$+$	$\vert$	$+$	
$h'(x)$		$-$	$\mathbf{0}$	$+$	
$h(x)$	11	$\searrow$	$\mathbf{9}$	$\nearrow$	$\frac{29}{3}$

Corrigé Savoir Df. 3

Corrigé Entraînement n°1

$$f'(x) = 14x^6 - 6x^5 + 9x^2 - 1$$

$$g'(x) = 4e^x - \frac{8}{2\sqrt{x}}$$

$$g'(x) = 4e^x - \frac{4}{\sqrt{x}}$$

$$h'(x) = \frac{-4}{3x^2} - \frac{3}{4}$$

$$i'(x) = \frac{5x^4}{10} + \frac{12x^3}{2}$$

$$i'(x) = \frac{x^4}{2} + 6x^3$$

Corrigé Entraînement n°2

$$j'(x) = 0{,}6x^2 - 6{,}8x - 5$$

$$k'(x) = 6x - \frac{e^x}{3}$$

$$l'(x) = \frac{-1}{2x^2}$$

$$m'(x) = \frac{3x^2}{6} - \frac{4x}{4}$$

$$m'(x) = \frac{x^2}{2} - x$$

Corrigé Entraînement n°3

$$a'(x) = 8x^7 - 15x^4 + 1 - 4e^x$$

$$b'(x) = 9x^2 + \frac{9}{x^2}$$

$$c'(x) = 1 - \frac{1}{10\sqrt{x}}$$

$$d'(x) = \frac{10x}{6} + \frac{2}{3x^2}$$

$$d'(x) = \frac{5}{3}x + \frac{2}{3x^2}$$

Corrigé Entraînement n°4

$$f'(x) = -5$$

$$g'(x) = 2(1 - e^x)$$

$$h'(x) = +\frac{3}{x^2}$$

$$i'(x) = \frac{3}{18}x^2 - \frac{4x}{9} + \frac{1}{3}$$

$$i'(x) = \frac{1}{6}x^2 - \frac{4}{9}x + \frac{1}{3}$$

Corrections Exercices type bac

Exercice 1 : Corrigé

1. $P(0) = 100 \times 0 \times\ e^{0} = 0$ et $P(5) = 100 \times 5 \times\ e^{-5} = 500e^{-5} \simeq 3$

2. a.

t	0		1		5
$1-t$		$+$	0	$-$	
$100e^{-t}$		$+$	$\vert$	$+$	
$P'(t)$		$+$	0	$-$	

b. Avec $P(1) = 100 \times 1 \times e^{-1} = 100e^{-1} \simeq 37$

t	0		1		5
$P(t)$	0	$\nearrow$	$100e^{-1}$	$\searrow$	$100e^{-5}$

c. La fonction P admet un maximum **pour $t = 1$.** Ce maximum est de $\boldsymbol{100e^{-1}}$ soit environ 37

3. On cherche à résoudre graphiquement $P(x) \leq 5$. On trouve $x \geq 4{,}5$.
Au bout de 4h30 on peut considérer que la pollution ne représente plus de danger pour la santé

Exercice 2 : Corrigé

1. $f(0) = 120e^{0} = 120$
La puissance du son ne cesse de décroître.

2. $f(3) = 120e^{-0{,}14\times 3} = \boldsymbol{120e^{-0{,}42}} \simeq 78{,}8$
La puissance du son après 3 secondes, sera d'environ 78,8 W

t	0		$+\infty$
$-16{,}8$		$-$	
$e^{-0{,}14t}$		$+$	
$f'(t)$		$-$	
$f(t)$	120	$\searrow$	

Exercice 3 : Corrigé

1. $N(1) = \boldsymbol{100e^{-2}} \simeq 14$ À 1 000 € , il y aurait environ **14 000 smartphones vendus**

2. $R(1) = 1 \times N(1) = 100e^{-2}$et $C(1) = 0{,}4 \times N(1) = 40e^{-2}$
Donc le bénéfice est de $B(1) = R(1) - C(1) = 100e^{-2} - 40e^{-2} = \boldsymbol{60e^{-2}} \simeq 8{,}120$
Le bénéfice peut en effet être estimé à 8,120 milliards d'euros pour un prix de vente 1 000 €

3. $B(x) = R(x) - C(x) = x \times 100e^{-2x} + 0{,}4 \times 100e^{-2x} = \boldsymbol{(100x - 40)e^{-2x}}$ CQFD

4. On a $B(0{,}4) = (40 - 40)e^{-0{,}8} = 0$;
$B(0{,}9) = (90 - 40)e^{-1{,}8} = 50e^{-1{,}8} \simeq 8{,}265$
et $B(2) = (200 - 40)e^{-4} = 160e^{-4} \simeq 2{,}93$

5. Le maximum est atteint pour $x = 0{,}9$, soit un **prix de vente de 900 €**

x	$0{,}4$		$0{,}9$		2
$180 - 200x$		$+$	0	$-$	
e^{-2x}		$+$	$\vert$	$+$	
$B'(x)$		$+$	$\mathbf{0}$	$-$	
$B(x)$	0	$\nearrow$	$\boldsymbol{50e^{-1{,}8}}$	$\searrow$	$160e^{-4}$

Exercice 4 : Corrigé

1. a. L'aire est de 49, donc $xy = 49 \iff y = \frac{49}{x}$
Le périmètre est donc de $2x + 2y = 2x + 2 \times \frac{49}{x} = \mathbf{2x + \frac{98}{x}}$ CQFD

b. pour $x = 10$, ona $2 \times 10 + \frac{98}{10} = 29{,}8$ soit **un périmètre de 29,8 cm**

2. a. On a $f'(x) = 2 - \frac{98}{x^2} = \frac{2x^2}{x^2} - \frac{98}{x^2} = \mathbf{\frac{2x^2-98}{x^2}}$ CQFD

b. on a $2x^2 - 98 = 2(x^2 - 49) = 2(x-7)(x+7)$
donc avec $f(7) = 14 + \frac{98}{7} = 28$

x	0		7		$+\infty$
$2x^2 - 98$	$\mid$	$-$	0	$+$	
x^2	0	$+$	$\mid$	$+$	
$f'(x)$		$-$	$\mathbf{0}$	$+$	
$f(x)$	$\parallel$	$\searrow$	$\mathbf{28}$	$\nearrow$	

3. Le périmètre est minimal quand $x = \mathbf{7}$.
On a alors $y = \frac{49}{x} = \frac{49}{7} = \mathbf{7}$.
Ce sera un carré de côté 7 cm

Exercice 5 : Corrigé

1. $f(2) = \frac{0{,}5\times 8 - 3\times 4 + 2 + 16}{2} = \frac{10}{2} = 5$ **Le coût moyen est de 5 000 €**

2. a. On a $f(x) = \frac{0{,}5x^3}{x} - \frac{3x^2}{x} + \frac{x}{x} + \frac{16}{x} = 0{,}5x^2 - 3x + 1 + \frac{16}{x}$ CQFD

b. $f'(x) = 0{,}5 \times 2x - 3 - \frac{16}{x^2} = \frac{x \times x^2 - 3 \times x^2 - 16}{x^2} = \frac{x^3 - 3x^2 - 16}{x^2}$ CQFD

3. On a : $(x-4)(x^2 + x + 4) = x^3 + x^2 + 4x - 4x^2 - 4x - 16 = x^3 - 3x^2 - 16$ CQFD

4. Pour $x^2 + x + 4$ on a $\Delta = -15$ le polynôme est donc toujours du signe de a, positif

x	1		4		5
$x - 4$		$-$	0	$+$	
$x^2 + x + 4$		$+$	$\mid$	$+$	
$f'(x)$		$-$	$\mathbf{0}$	$+$	
$f(x)$	$14{,}5$	$\searrow$	$\mathbf{1}$	$\nearrow$	$1{,}7$

5. On a un minimum de 1 obtenu pour $x = 4$
Le coût sera minimal pour 4 000 pièces produites. Il sera alors de 1 000 €

Exercice 6 : Corrigé

1. Le coût maximal semble atteint pour **5 tonnes de produit**

2. a. Comme une exponentielle est toujours positive, on a : $\mathcal{C}_m(x) \geq 0 \iff -x + 5{,}4 \geq 0 \iff x \geq 5{,}4$
Le coût marginal est négatif à partir de 5,4 tonnes produites

b. $\mathcal{C}(0) = -2e^0 + 2 = -2 + 2 = 0$; $\mathcal{C}(5{,}4) = 25e^{-1{,}08} + 2 \simeq 10{,}490$ Et $\mathcal{C}(10) = 48e^{-2} + 2 \simeq 8{,}496$.

x	0		$5{,}4$		10
$\mathcal{C}_m(x)$		$+$	$\mathbf{0}$	$-$	
$\mathcal{C}(x)$	0	$\nearrow$	$\simeq \mathbf{10}$	$\searrow$	$\simeq 8$

c. Le coût maximal est de 10 **490 €.**