## Exercice 4 : Récurrence directe et minoration/majoration

**1)** On considère la suite définie par $u_0 = -1$ et pour tout entier naturel $n$ par : $u_{n+1} = 0{,}2u_n + 0{,}6$
Démontrer par récurrence que, pour tout entier $n \geq 0$, $u_n \leq 1$

**2)** Soit la suite $(v_n)$ définie par $v_1 = 5$ et pour tout entier naturel $n$ non nul par : $v_{n+1} = \sqrt{5v_n - 4}$
Démontrer par récurrence que, pour tout entier $n \geq 1$, $v_n \geq 4$

**3)** On considère la suite définie par $w_0 = 0$ et pour tout entier naturel $n$ par : $w_{n+1} = {w_n}^2 + 1$

**a.** A l'aide de la calculatrice, trouver la valeur du plus petit rang $n_0$ à partir duquel on a $w_n \geq 2^n$.

**b**. En développant$(2^p - 1)^2$, montrer que $2^{2p} + 1 \geq 2^{p+1}$.

**c.** Démontrer par récurrence que pour tout $n \geq n_0$, on a effectivement $w_n \geq 2^n$.

### Pour aller plus loin...

**1)** On considère la suite définie par $u_1 = 2$ et pour tout entier naturel $n \geq 1$ par : $u_{n+1} = \frac{3}{10}u_n + 7$
Démontrer par récurrence que, pour tout entier $n \geq 1$, $u_n \leq 10$

**2)** Soit la suite $(v_n)$ définie par $v_0 = 2$ et pour tout entier naturel $n$ non nul par : $v_{n+1} = \sqrt{9v_n}$
Démontrer par récurrence que, pour tout entier $n$, $0 < v_n \leq 9$

**3)** Soit la suite $(w_n)$ définie par $w_0 = 2$ et pour tout entier naturel $n$ non nul par : $w_{n+1} = \frac{1}{w_n} + 1$
Montrer, par récurrence que, pour tout entier naturel non nul, $\frac{3}{2} \leq w_n \leq 2$

## Exercice 5 : Utilisation de la fonction de récurrence

**1)** Soit $(u_n)$ la suite définie par $u_{n+1} = \frac{2u_n+5}{u_n+6}$ et $u_0 = -1$.

**a.** Montrer que la fonction $f$ définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{2x+5}{x+6}$ est strictement croissante.

**b.** Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n$, on a : $u_n \leq 1$.

**2)** Soit $(v_n)$ la suite définie par $v_{n+1} = -\frac{1}{8}v_n^2 + 2$ et $v_0 = 0$.

**a.** Étudier le sens de variation de la fonction $g$ définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -\frac{1}{8}x^2 + 2$.

**b.** En déduire que, pour tout entier naturel $n$, on a $0 \leq v_n \leq 2$.

**3)** Soit $(u_n)$ la suite définie par $u_{n+1} = \phi(u_n)$ et $u_0 = 1$ avec : $\phi(x) = 1 - e^{x-1}$ définie sur $[0; +\infty[$ .

**a.** Étudier le sens de variation de $\phi$.

**b.** Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n$, on a : $0 \leq u_n \leq 1$.

### Pour aller plus loin...

**4)** Soit $(w_n)$ la suite définie par $w_{n+1} = \frac{2w_n+1}{u_n}$ et $w_0 = 3$.

**a.** Montrer que la fonction $f$ définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{2x+1}{x}$ est strictement décroissante.

**b.** Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n$, on a : $2 \leq w_n \leq 3$.

**5)** Soit $(u_n)$ la suite définie par $u_{n+1} = \ln(u_n + 1)$ et $u_0 = 1$.

**a.** Montrer que la fonction $f$ définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = \ln(x + 1)$ est strictement croissante.

**b.** Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n$, on a : $0 \leq u_n \leq 1$.

## Exercice 6 : Autres, mixtes

**1)** Soit la suite $(u_n)$ définie par $u_{n+1} = u_n + 2n + 3$ et $u_0 = 1$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n > n^2$.

**2)** Soit la suite $(a_n)$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $a_n = n^2 - 3\sin n$. Montrer que, pour tout $n$, $a_n \geq n^2 - 3$. (On rappelle que le sinus d'un angle est toujours compris entre $-1$ et $1$).

**3)** Soit la suite $(p_n)$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $p_n = (1+n)^4$. Justifier que, pour tout $n$, $p_n \geq 1 + 4n$.

**4)** Soit la suite $(w_n)$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $w_n = \left(\frac{2}{n+1}\right)^n$. En déduire que, pour tout $n$, on a $w_n \leq 2^n$.