Exercice 12 : Composée de fonctions

1) Déterminer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x^2}$ **b)** $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{1-2x}$ **c)** $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x}$ **d)** $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{3-x^2}$

e) $\lim\limits_{x\to-\infty} \ln(x^2)$ **f)** $\lim\limits_{x\to-\infty} \ln\left(\frac{2}{1-x}\right)$ **g)** $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(2x-3)$ **h)** $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{x-2}{x^2+1}\right)$

i) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{(3-2x)^2}$ **j)** $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{1-x}$ **k)** $\lim\limits_{x\to+\infty} (2-x^2)^3$ **l)** $\lim\limits_{x\to-\infty} \ln(1+e^x)$

m) $\lim\limits_{x\to0^+} (\ln x)^2$ **n)** $\lim\limits_{x\to0^-} \ln\left(1-\frac{1}{x}\right)$ **o)** $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} \ln(x-1)$ **p)** $\lim\limits_{x\to0^+} e^{1-\ln x}$

q) $\lim\limits_{x\to0^+} \ln(e^x-1)$ **r)** $\lim\limits_{x\to-2^-} e^{\frac{1}{x+2}}$ **s)** $\lim\limits_{\substack{x\to3\\x<3}} \frac{-2}{\sqrt{3-x}}$ **t)** $\lim\limits_{x\to1^-} \ln\left(\frac{x-3}{x-1}\right)$

2) Composée de fonctions et opérations

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^{-x}$ **b)** $\lim\limits_{x\to0^+} e^{2x}\left(2-\frac{1}{x}\right)$ **c)** $\lim\limits_{x\to3^-} \frac{1}{2x-6}+\ln(3-x)$ **d)** $\lim\limits_{x\to+\infty} 1-e^{1-x}$

e) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\ln(2-x)}{2+e^x}$ **f)** $\lim\limits_{x\to0^+} 2x\sqrt{1-2\ln x}$ **g)** $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x-2}{1-e^{-x}}$ **h)** $\lim\limits_{x\to2^+} 5x\ln(x-2)$

Exercice 13 : Études de fonction

1) Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x)=\ln(e^{2x}-e^x)$

a. Montrer que, pour tout $x>0$, on a : $f(x)=2x+\ln(1-e^{-x})$ et $f(x)=x+\ln(e^x-1)$

b. Choisir la bonne forme de $f(x)$ pour déterminer $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

c. Choisir la bonne forme de $f(x)$ pour déterminer le signe de $f(x)$

d. La dérivée de f et le signe de f'. Faire le tableau de variation complet de f

2) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x)=\frac{9}{2}e^{-2x}-3e^{-3x}$. On note $\mathcal{C}_g$ sa courbe représentative.

a. Montrer que, pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a : $g(x)=3e^{-2x}\left(\frac{3}{2}-e^{-x}\right)$

b. Déterminer la limite de g en $+\infty$ puis en $-\infty$

c. Étudier les variations de g.

d. Justifier que $\mathcal{C}_g$ coupe l'axe des abscisses en un seul point. Donner ses coordonnées à 10^{-2} près.

Exercice 14 : Utilisation des croissances comparées

1) Déterminer les limites suivantes

a)	$\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x}$	**b)**	$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{\ln x}$	**c)**	$\lim\limits_{x\to-\infty} (x+3)e^{x}$	**d)**	$\lim\limits_{x\to0^+} x^2\ln x$
e)	$\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^x}{x}$	**f)**	$\lim\limits_{x\to+\infty} e^x - x$	**g)**	$\lim\limits_{x\to+\infty} x-\ln x$	**h)**	$\lim\limits_{x\to+\infty} (1+x)e^{-x}$
i)	$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x+1}{e^x}$	**j)**	$\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x+1}{e^x}$	**k)**	$\lim\limits_{x\to+\infty} e^{2x}-xe^{x}$	**l)**	$\lim\limits_{x\to0^-} \dfrac{1}{x}e^{\frac{1}{x}}$

2) Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=\frac{\ln x}{2x+1}$

a. Déterminer la limite de $f(x)$ quand x tend vers 0

b. Vérifier que, pour tout $x>0$, $f(x)=\frac{\ln x}{x}\left(\frac{1}{2+\frac{1}{x}}\right)$. En déduire la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$

Exercice 15 : Étude de fonction

1) Soit f la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x)=-x+\dfrac{\ln x}{x}$

a) Déterminer les limites en 0 et en $+\infty$.
En déduire que la courbe représentative de f admet une asymptote.

b) On considère la fonction g définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $g(x)=-x^2+1-\ln x$.
Étudier le sens de variation de g
Calculer $g(1)$ et en déduire le signe de $g(x)$ en fonction de x.

c) Dresser le tableau de variation complet de la fonction f

Suite de l'exercice 15 page suivante

Exercice 15 : suite

2) Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x)=(x+1)e^{-x}-x+1$

a) Déterminer les limites de h en $-\infty$ et en $+\infty$.

b) Calculer h'

c) Déterminer les limites de h' en $-\infty$ et en $+\infty$

d) Étudier les variations de h' puis démontrer que $h'(x)=0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$.
Donner un encadrement de α à 10^{-2} près.

e) En déduire le signe de h' puis le sens de variation de h

f) Calculer la limite en $+\infty$ de $h(x)-(-x+1)$. En déduire une interprétation graphique.