

Savoirs Si.1 : Opérations sur les inégalités

Exercice 1 : Opérations successives sur des inégalités

1) Compléter les encadrements (ou inégalités) avec les $\leq$ ou $\geq$ qui conviennent

a) $x \leq 5 \Leftrightarrow -2x \dots -10$	b) $u_n \geq -3 \Leftrightarrow u_n + 7 \dots 4$	c) $x \geq 2 \Leftrightarrow \frac{1}{x} \dots \frac{1}{2}$
d) $u_n \leq -2 \Leftrightarrow (u_n)^2 \dots 4$	e) $0 \leq x \leq 4 \Leftrightarrow 0 \dots \frac{1}{2}x \dots 2$	f) $0 \leq x \leq 6 \Leftrightarrow 0 \dots -x \dots -6$
g) $0 \leq x \leq 1 \Leftrightarrow 1 \dots e^x \dots e$	h) $1 \leq u_n \leq 2 \Leftrightarrow 1 \dots \frac{1}{u_n} \dots \frac{1}{2}$	i) $x \geq 2 \Leftrightarrow \sqrt{x} \dots \sqrt{2}$

2) Compléter les enchainements d'encadrements (ou inégalités) avec les $\leq$ ou $\geq$ qui conviennent

a) $0 \leq u_n \leq 5$ $\Leftrightarrow 0 \dots 2u_n \dots 10$ $\Leftrightarrow -3 \dots 2u_n - 3 \dots 7$	b) $-2 \leq x \leq 4$ $\Leftrightarrow 1 \dots -\frac{1}{2}x \dots -2$ $\Leftrightarrow 2 \dots -\frac{1}{2}x + 1 \dots -1$	c) $-1 \leq x \leq 0$ $\Leftrightarrow 1 \dots x^2 \dots 0$ $\Leftrightarrow 0 \dots x^2 - 1 \dots -1$	d) $0 \leq u_n \leq 4$ $\Leftrightarrow 0 \dots \sqrt{u_n} \dots 2$ $\Leftrightarrow 2 \dots \sqrt{u_n} + 2 \dots 4$
e) $4 \leq x \leq 5$ $\Leftrightarrow 1 \dots x - 3 \dots 2$ $\Leftrightarrow 1 \dots (x - 3)^2 \dots 4$	f) $-2 \leq u_n \leq 3$ $\Leftrightarrow 6 \dots -3u_n \dots -9$ $\Leftrightarrow 13 \dots 7 - 3u_n \dots -2$	g) $0 \leq x \leq 1$ $\Leftrightarrow 1 \dots e^x \dots e$ $\Leftrightarrow 0 \dots e^x - 1 \dots e - 1$	h) $1 \leq x \leq 2$ $\Leftrightarrow 1 \dots x^2 \dots 4$ $\Leftrightarrow 0 \dots \ln(x^2) \dots \ln 4$

3) Dans chaque cas, déduire de l'encadrement sur x un encadrement sur $f(x)$

- a) $f(x) = 3 - 5x$ pour $-1 \leq x \leq 2$ b) $f(x) = 2x^2 - 4$ pour $1 \leq x \leq 3$
c) $f(x) = \frac{1}{x} + 2$ pour $\frac{1}{3} \leq x \leq \frac{1}{2}$ d) $f(x) = 1 - 2e^x$ pour $-1 \leq x \leq 0$

Exercice 2 : Utilisation du sens de variation d'une fonction

1) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 + x + 6$
dont on donne ci-contre le tableau de variation.

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow \frac{25}{4} \searrow$	

- a) Déterminer pour $-1 \leq x \leq 0$ un encadrement de $f(x)$
b) Montrer que, pour $x \in [2 ; 3]$ on a $0 \leq f(x) \leq 4$
c) Peut-on trouver un encadrement pour $f(x)$ quand $-1 \leq x \leq 1$?

2) Soit g la fonction définie sur $[0 ; 4]$ par $g(x) = \ln(x + 1)$.

- a) Calculer $g'(x)$ et montrer que la fonction g est strictement croissante sur $[0 ; 4]$
b) justifier que, pour $0 \leq x \leq e - 1$ on a $0 \leq \ln(x + 1) \leq 1$

3) Soit h la fonction définie sur $[0 ; 1]$ par $h(x) = e^{1-x} - 1$

- a) Déterminer le tableau de variation de h sur $[0 ; 1]$
b) En déduire que, pour tout $x \in \left[\frac{1}{2} ; 1\right]$, on a : $1 \leq e^{1-x} \leq \sqrt{e}$

Exercice 3: Élargissement d'inégalités

1) Déterminer dans chaque cas si l'implication vers un élargissement est vraie ou fausse.

a) $x \leq \frac{5}{2} \Rightarrow x \leq 3$	b) $u_n \geq -\frac{1}{2} \Rightarrow u_n \geq 0$	c) $x \geq \sqrt{2} \Rightarrow x \geq 0$
d) $x \leq e^{-2} \Rightarrow x \leq 1$	e) $1 \leq x \leq 3 \Rightarrow 0 \leq x \leq \frac{7}{2}$	f) $-2 \leq u_n \leq -\frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{3}{2} \leq u_n \leq -1$
g) $\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{11} \Rightarrow 1 \leq x \leq 4$	h) $u_n \leq \ln 2 \Rightarrow 0 < u_n \leq 2$	i) $\ln 2 \leq x \leq \ln 5 \Rightarrow 0 \leq x \leq 2$

2) Élargir les encadrements aux plus proches entiers.

a) $e^{-1} \leq x \leq e$	b) $-\frac{5}{4} \leq x \leq \frac{2}{3}$	c) $\sqrt{2} \leq u_n \leq \sqrt{27}$	d) $-1,6 \leq u_n \leq 0,2$	e) $x \leq \ln\left(\frac{1}{3}\right)$
----------------------------------	--	--	------------------------------------	--

3) Élargir une des bornes à zéro, quand c'est possible.

a) $\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{5}{3}$	b) $-5 \leq u_n \leq -2$	c) $\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{8}$	d) $\ln\left(\frac{1}{5}\right) \leq u_n \leq \ln\left(\frac{8}{5}\right)$	e) $x \geq e^{-2}$
---	---------------------------------	---	---	---------------------------

4) On a toujours $n \geq 0$ et $x \geq 0$ dans les inégalités qui suivent.

En déduire quand c'est possible un minorant et/ou un majorant constant.

a) $f(x) \geq x + 2$	b) $u_n \leq 2 - n^2$	c) $0 \leq f(x) \leq 5 - 2x$	d) $3 + n \leq u_n \leq 3 + 2n$
-----------------------------	------------------------------	-------------------------------------	--