Savoir Sag. 1 : Suites, cas général – calcul de termes et contexte

Entraînement n°1

1) On donne les suites u, v et w définies par : $u_n = 3n - 7$, $v_n = \frac{1}{n+3} - 2n^2$ et $w_n = 8 \times 0{,}9^n + 10$

a. Calculer u_{16}, v_2 et w_7 *(arrondis au centième près si besoin)*

b. Exprimer en fonction de n les termes u_{n-1} et $w_n + 1$

2) On donne la suite (a_n) définie par son 1er terme $a_0 = 9$ et la relation de récurrence : $a_{n+1} = 3 + 2a_n$ et la suite (b_n) définie par son premier terme $b_1 = \frac{1}{2}$ et la relation $b_{n+1} = 4b_n + \frac{1}{b_n}$

a. Calculer les termes a_1 ; a_2 et b_3 *(valeurs exactes)*

b. Exprimer le plus simplement possible les termes a_{n-1} et $a_n - 1$

3) On se propose de modéliser par une suite (u_n) l'évolution de l'émission moyenne de CO_2 (exprimée en grammes de CO_2 par km) des voitures particulières neuves immatriculées chaque année en France.
On considère que celle-ci diminue de 2 % par an à partir de 2013.
Pour tout entier naturel n, on note u_n l'émission moyenne de CO_2 des voitures particulières neuves immatriculées dans l'année en France pour l'année $2013 + n$. On a $u_0 = 117$.

a. Calculer u_1 et interpréter le résultat dans le contexte.

b. On modélise la suite (u_n) par la formule $u_n = 117 \times 0{,}98^n$
Selon ce modèle, calculer l'émission en 2020 pour les voitures particulières neuves (arrondir au centième).

Entraînement n°2

1) On donne les suites s_n et t_n définies pour tout entier n par : $s_n = 2^n - 1$ et $t_n = 14 + 8(n-1)$
ainsi que la suite (r_n) définie par $r_n = 5\sqrt{n} + \frac{1}{n+1}$ pour $n \geq 2$

a. Calculer s_6 , t_{13} et r_9

b. Exprimer en fonction de n les termes $s_n - 1$ et t_{n+1}

2) On donne la suite (U_n) définie par son 1er terme $U_1 = 16$ et la relation de récurrence : $U_{n+1} = 0{,}75U_n$
ainsi que la suite (V_n) définie par $\begin{cases} V_{n+1} = 2V_n + \frac{1}{V_{n-1}} \\ V_0 = 2 \text{ et } V_1 = 1 \end{cases}$

a. Calculer les termes U_2 , U_3 et V_3 *(valeur exacte)*

b. Exprimer le plus simplement possible les termes V_{n+2} et $U_n - 2$

La suite page suivante

3) Un apiculteur constate qu'entre le 1er mars 2014 et le 1er mars 2015, la population d'abeilles adultes de ses ruches a diminué d'environ 8 300. Au 1er mars 2014, l'apiculteur avait dénombré 55 200 abeilles adultes dans ses ruches.
Cherchant à estimer la population de ses ruches, il modélise son évolution à l'aide d'une suite (p_n) où p_n est le nombre de milliers d'abeilles dans ses ruches au 1er mars de l'année $2014+n$. On a donc $p_0 = 55{,}2$.

a. Calculer p_1 et interpréter le résultat dans le contexte.

b. On modélise la suite par la relation de récurrence $p_{n+1} = p_n - 8{,}3$.
Quelle estimation peut faire l'apiculteur de la population d'abeilles dans ses ruches au 1er mars 2019 ?

Entraînement n°3

1) On donne les suites a_n et b_n définies pour tout entier n par : $a_n = 5 \times 1{,}06^{n-1}$, $b_n = 500 - 15n$
et la suite (C_n) définie par $C_n = 1 + (n-1)(n+2)$ pour $n \geq 1$

a. Calculer a_3 , b_9 et C_5

b. Exprimer en fonction de n les termes C_{n-1} *et* $b_n + 1$

2) On donne la suite (u_n) définie par son 1er terme $u_0 = 0{,}2$ et la relation de récurrence : $u_{n+1} = 3u_n + 1{,}2$
ainsi que la suite (w_n) définie par son premier terme $w_1 = \frac{3}{2}$ et la relation $w_{n+1} = \dfrac{n}{2w_n+1}$

a. Calculer les termes u_2 et w_3

b. Exprimer le plus simplement possible les termes w_{n+2} et $u_n - 1$

3) On modélise l'évolution de la population française entre 1911 et 2011 par une suite (P_n) telle que :

$$P_n = 39{,}6 \times 1{,}005^n$$

où P_n est le nombre de millions d'habitants en France en l'année $1911+n$

a. Calculer P_0 et interpréter le résultat dans le cadre de l'exercice.

b. Donner une estimation de la population française en l'an 2000 selon ce modèle.

Savoir Sag. 1 : Corrigés

Corrigé Entraînement n°1

1) a. $u_{16} = 3 \times 16 - 7 = \mathbf{41}$; $v_2 = \frac{1}{2+3} - 2 \times 2^2 = \frac{1}{5} - 8 = \frac{\mathbf{-39}}{\mathbf{5}}$ et $w_7 = 8 \times 0{,}9^7 + 10 \simeq \mathbf{13{,}83}$

b. $u_{n-1} = 3(n-1) - 7 = 3n - 3 - 7 = \mathbf{3n - 10}$ et $w_n + 1 = 8 \times 0{,}9^n + 10 + 1 = \mathbf{8 \times 0{,}9^n + 11}$

2) a. $a_1 = 3 + 2a_0 = 3 + 2 \times 9 = \mathbf{21}$ et $a_2 = 3 + 2a_1 = 3 + 2 \times 21 = \mathbf{45}$

$b_2 = 4b_1 + \frac{1}{b_1} = 4 \times \frac{1}{2} + \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2 + 2 = 4$ et $b_3 = 4 \times 4 + \frac{1}{4} = 16 + \frac{1}{4} = \frac{\mathbf{65}}{\mathbf{4}}$

b. $\boldsymbol{a_{n-1} = 3 + 2a_{n-2}}$ et $\boldsymbol{a_n - 1 = 3 + 2a_{n-1} - 1}$

3) a. Diminuer de 2% revient à multiplier par : $CM = 1 - \frac{2}{100} = 0{,}98 \Rightarrow u_1 = 0{,}98 \times 117 = \mathbf{144{,}66}$

En 2014, les voitures particulières émettent en moyenne 144,66 g/km de CO_2

b. L'année 2020 correspond au rang 7, donc $u_7 = 117 \times 0{,}98^7 \simeq \mathbf{101{,}57}$

En 2020, l'émission de CO_2 pour les voitures particulières neuves serait d'environ 101,57 g/km

Corrigé Entraînement n°2

1) a. $s_6 = 2^6 - 1 = 63$; $t_{13} = 14 + 8 \times (13 - 1) = 14 + 8 \times 12 = \mathbf{110}$

et $r_9 = 5 \times \sqrt{9} + \frac{1}{9+1} = 5 \times 3 + \frac{1}{10} = 15 + \frac{1}{10} = \frac{\mathbf{151}}{\mathbf{10}}$

b. $s_n - 1 = 2^n - 1 - 1 = \mathbf{2^n - 2}$ et $t_{n+1} = 14 + 8((n+1) - 1) = \mathbf{14 + 8n}$

2) a. $U_2 = 0{,}75U_1 = 0{,}75 \times 16 = \mathbf{12}$ et $U_3 = 0{,}75 \times 12 = \mathbf{9}$

$V_2 = 2V_1 + \frac{1}{V_0} = 2 \times 1 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$ et $V_3 = 2V_2 + \frac{1}{V_1} = 2 \times \frac{5}{2} + \frac{1}{1} = 5 + 1 = \mathbf{6}$

b. $V_{n+2} = \boldsymbol{2V_{n+1} + \frac{1}{V_n}}$ et $U_n - 2 = \boldsymbol{0{,}75U_{n-1} - 2}$

3) a. $p_1 = 55{,}2 - 8{,}3 = \mathbf{46{,}9}$ **au 1er mars 2015, il restait 46 900 abeilles dans les ruches.**

b. 2019 correspond au rang 5. À la calculatrice, on calcule $p_2 = 38{,}6$; $p_3 = 30{,}3$; $p_4 = 22$ et $p_5 = \mathbf{13{,}7}$

Il resterait 13 700 abeilles dans ses ruches au 1er mars 2019.

Corrigé Entraînement n°3

1) **a.** $a_3 = 5 \times 1{,}06^{3-1} = 5 \times 1{,}06^2 = 5{,}618$; $b_9 = 500 - 15 \times 9 = \mathbf{365}$

et $C_5 = 1 + (5-1) \times (5+2) = 1 + 4 \times 7 = \mathbf{29}$

b. $C_{n-1} = 1 + (n-1-1)(n-1+2) = \mathbf{1 + (n-2)(n+1)}$ $\quad et\ b_n + 1500 - 15n + 1 = \mathbf{501 - 15n}$

2) **a.** $u_1 = 3u_0 + 1{,}2 = 3 \times 0{,}2 + 1{,}2 = 1{,}8$ et $u_2 = 3 \times 1{,}8 + 1{,}2 = \mathbf{6{,}6}$

$w_2 = \frac{1}{2w_1+1} = \frac{1}{2\times\frac{3}{2}+1} = \frac{1}{3+1} = \mathbf{\frac{1}{4}}$ et $w_3\ \frac{2}{2w_2+1} = \frac{2}{2\times\frac{1}{4}+1} = \frac{2}{\frac{1}{2}+1} = 2 \div \frac{3}{2} = 2 \times \frac{2}{3} = \mathbf{\frac{4}{3}}$

b. $w_{n+2} = \mathbf{\frac{n+1}{2w_{n+1}+1}}$ et $u_n - 1 = 3u_{n-1} + 1{,}2 - 1 = \mathbf{3u_{n-1} + 0{,}2}$

3) **a.** $P_0 = 39{,}6 \times 1{,}005^0 = 39{,}6 \times 1 = 39{,}6$

En 1911, la population française était de 39,6 millions d'habitants

b. L'an 2000 correspond au rang 89 $\Rightarrow P_{89} = 39{,}6 \times 1{,}005^{89} \simeq \mathbf{61{,}73}$

Selon ce modèle, la population française serait d'environ 61,73 millions d'habitant (ce qui est sous-estimé par rapport à la réalité)