

Savoirs Fle. 2 : Propriétés du logarithme

Exercice 7: Applications des formules

1) Opposé $\ln(-A) = \ln\left(\frac{1}{A}\right)$

- Transformer le logarithme en opposé :

a) $\ln\left(\frac{1}{x}\right)$ b) $\ln\left(\frac{1}{4x}\right)$ c) $\ln\left(\frac{1}{x+2}\right)$

- Transformer l'opposé en logarithme:

f) $-\ln(3)$ g) $-\ln(2x)$ h) $1 - \ln\left(\frac{x+1}{2}\right)$

2) Logarithme d'un produit/quotient et somme

$$\ln(AB) = \ln(A) + \ln(B) \text{ ou } \ln\left(\frac{A}{B}\right) = \ln(A) - \ln(B)$$

- Transformer le logarithme en somme :

a) $\ln 5x$ b) $\ln\left(\frac{x}{2}\right)$ c) $\ln(2x + 6)$ d) $\ln\left(\frac{x+1}{x-3}\right)$

- Transformer la somme en logarithme simple :

g) $\ln x + \ln 3$ h) $\ln(3x) - \ln 6$ i) $\ln(7) - \ln(7x)$
j) $\ln x + \ln(3x - 1)$

3) Puissances $\ln(A^n) = n \ln(A)$

- Transformer le logarithme en multiple :

a) $\ln(x^2)$ b) $\ln(4x^2)$ c) $\ln(e^3)$

- Transformer le multiple en logarithme simple :

f) $3 \ln x$ g) $-2 \ln x$ h) $\frac{1}{2} \ln x$

Un peu plus...

- Logarithme \Rightarrow Opposé

d) $\ln\left(\frac{1}{2-3x}\right)$ e) $\ln\left(\frac{1}{e}\right)$

- Opposé \Rightarrow Logarithme

i) $-\ln(2)$ j) $1 - \ln(x)$

- Logarithme \Rightarrow Somme :

e) $\ln\left(\frac{3}{x}\right)$ f) $\ln((x+4)(1-x))$

- Somme \Rightarrow Logarithme:

k) $\ln x - \ln(x^2)$ l) $1 + \ln(2x)$

- Logarithme \Rightarrow Multiple

d) $\ln(\sqrt{x})$ e) $\ln(e^{-2})$

- Multiple \Rightarrow Logarithme

i) $2 \ln(x^2)$ j) $-2 \ln(x-1)$

Exercice 8: Tout à appliquer

1) Écrire en fonction de $\ln 2$

les nombres suivants :

$$A = \ln\left(\frac{e^2}{8}\right)$$

$$B = \ln\left(\frac{1}{2}\right) + \ln(2e)$$

$$C = \ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \ln\frac{1}{4}$$

2) Simplifier les expressions suivantes de manière à ce que le \ln du logarithme n'apparaisse à la fin qu'une seule fois dans le calcul.

$$A = 2 \ln x + \ln(2x)$$

$$B = \ln(3x - 1) - 3 \ln x$$

$$C = 2 - \ln(x + e)$$

$$D = \ln x + \ln(3x) - 2 \ln(x^2)$$

$$E = \ln\left(\frac{x+1}{2x}\right) + 2 \ln x$$

$$F = \ln(x+3) - \ln 3 + 2 \ln x$$

3) Montrer que : a) $\ln\left(\frac{1}{2}\right) + \ln\left(\frac{2}{3}\right) + \ln\left(\frac{3}{4}\right) = \ln\left(\frac{1}{4}\right)$ b) $\ln(3 + \sqrt{5}) + \ln(3 - \sqrt{5}) = 2 \ln 2$

4) A-t-on toujours : $\ln(x-1) + \ln(x+1) = \ln(x^2-1)$?

Exercice 9 : Démonstrations d'égalités

1) On définit pour $x > 0$ les fonctions $f(x) = \ln(e + x)$ et $g(x) = 1 + \ln x$
Montrer qu'on a $f(x) - g(x) = \ln\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{e}\right)$

2) On définit pour tout réel $x > 0$ la fonction f par $f(x) = \ln\left(\frac{3x+1}{x+1}\right)$.
Montrer que, pour tout $x > 0$, on a $f'(x) = \frac{2}{(3x+1)(x+1)}$

Un peu plus...

On définit pour tout réel $x \in]0; +\infty[$ la fonction g par :

$$g(x) = x(1 - \ln x)^2$$

Montrer que, pour tout $x > 0$, on a :

$$g'(x) = (\ln x + 1)(\ln x - 1)$$

Exercice 10 : Avec une suite, ça donne quoi ?

On définit pour tout entier naturel n la suite : $u_n = \ln(5 \times 3^n)$

1) Calculer les valeurs exactes de u_0 ; u_1 et u_2

2) La suite est-elle géométrique ou arithmétique ? quelle est sa raison ?