Savoir SL. 3 - Suites auxiliaires

Entraînement 1

(u_n) définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et $u_{n+1} = 3u_n + 2n - 4$ et (w_n) définie par $w_n = u_n + n - \frac{3}{2}$

1) Démontrer que (w_n) est géométrique de raison 3.

2) En déduire l'expression de w_n puis celle de u_n en fonction de n

Entraînement 2

(u_n) définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et $u_{n+1} = \frac{3u_n}{1+2u_n}$ et (a_n) définie par $a_n = \frac{u_n}{1-u_n}$

a. Démontrer que (a_n) est géométrique de raison 3.

b. On admet que $u_n = \frac{a_n}{1+a_n}$. En déduire l'expression u_n en fonction de n

Entraînement 3

(u_n) définie par $u_0 = \frac{1}{3}$ et $u_{n+1} = n - 2u_n$ et (a_n) définie par : $a_n = 3n - 1 - 9u_n$

Démontrer que (a_n) est géométrique de raison -2. En déduire l'expression de u_n en fonction de n

Entraînement 4

(u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{9}{6-u_n}$ et (a_n) définie par $a_n = \frac{1}{u_n-3}$

Démontrer que (a_n) est arithmétique de raison $-\frac{1}{3}$. En déduire l'expression de u_n en fonction de n

Entraînement 5 *

Les suites (a_n) et (b_n) sont définies par : $a_0 = 3$; $b_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$: $\begin{cases} a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2} \\ b_{n+1} = \frac{2a_n+b_n}{3} \end{cases}$

a) On définit pour tout entier naturel n la suite (u_n) par : $u_n = a_n - b_n$.

Démontrer que (u_n) est géométrique de raison $-\frac{1}{6}$ puis exprimer u_n en fonction de n

b) On définit pour tout entier naturel n la suite (w_n) par : $w_n = 4a_n + 3b_n$.

Démontrer que (w_n) est stationnaire, puis exprimer w_n

c) On admet que, pour tout entier naturel n, on a : $\begin{cases} a_n = \frac{3u_n+w_n}{7} \\ b_n = \frac{-4a_n+w_n}{7} \end{cases}$

Exprimer a_n en fonction de n

Corrigé Savoir SL. 3

Corrigé Entraînement 1

1) D'une part : $w_{n+1} = u_{n+1} + n + 1 - \frac{3}{2}$

$w_{n+1} = 3u_n + 2n - 4 \quad + n - \frac{1}{2} = 3u_n + 3n - \frac{9}{2}$

D'autre part : $w_n = u_n + n - \frac{3}{2} \Rightarrow 3w_n = 3u_n + 3n - \frac{9}{2}$

Donc $\boldsymbol{w_{n+1} = 3w_n}$

La suite (w_n) est géométrique de **raison 3** et de **1^er^ terme** $\boldsymbol{w_0} = \frac{1}{2} + 0 - \frac{3}{2} = \mathbf{-1}$

2) On a $w_n = w_0 \times q^n = \mathbf{-1 \times 3^n}$ et $u_n = w_n - n + \frac{3}{2} \Rightarrow u_n = \boldsymbol{-3^n - n + \frac{3}{2}}$

Corrigé Entraînement 2

$$\boldsymbol{a}. \quad a_{n+1} = \frac{u_{n+1}}{1 - u_{n+1}} = \frac{\frac{3u_n}{1+2u_n}}{1 - \frac{3u_n}{1+2u_n}} = \frac{\frac{3u_n}{1+2u_n}}{\frac{1+2u_n-3u_n}{1+2u_n}} = \frac{3u_n}{1-u_n} \; et \; 3a_n = 3 \times \frac{u_n}{1-u_n} = a_{n+1}$$

(a_n) est géométrique de raison 3.

b. On a $a_0 = \frac{u_0}{1-u_0} = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \div \frac{1}{2} = 1$ donc $a_n = a_0 \times q^n = \mathbf{3^n}$

Et $u_n = \frac{a_n}{1+a_n} = \boldsymbol{\frac{3^n}{1+3^n}}$

Corrigé Entraînement 3

1) $a_{n+1} = 3(n+1) - 1 - 9u_{n+1} = 3n + 2 - 9(n - 2u_n) = -6n + 2 + 18u_n$

Et $a_n = 3n - 1 - 9u_n \Rightarrow -2a_n = -6n + 2 + 18u_n$

Donc $\boldsymbol{a_{n+1} = -2a_n}$

La suite (a_n) est géométrique de **raison** $\mathbf{-2}$ et de **1^er^ terme** $\boldsymbol{a_0} = 3 \times 0 - 1 - 9 \times \frac{1}{3} = \mathbf{-4}$

2) On a $a_n = a_0 \times q^n = \mathbf{-4 \times (-2)^n}$ et :

$$u_n = \frac{a_n - 3n + 1}{-9} = \frac{-4 \times (-2)^n - 3n + 1}{-9} = \boldsymbol{\frac{4}{9} \times (-2)^n + \frac{n}{3} - \frac{1}{9}}$$

Corrigé Entraînement 4

a. on a : $a_{n+1} = \dfrac{1}{u_{n+1}-3} = \dfrac{1}{\dfrac{9}{6-u_n}-3} = \dfrac{1}{\dfrac{9-3(6-u_n)}{6-u_n}} = \dfrac{6-u_n}{-9+3u_n}$

D'autre part : $a_n = \dfrac{1}{u_n-3} \Rightarrow a_n - \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{u_n-3} - \dfrac{1}{3} = \dfrac{3-(u_n-3)}{3u_n-9} = \dfrac{6-u_n}{3u_n-9}$

Donc $a_{n+1} = a_n - \dfrac{1}{3}$

(a_n) est bien arithmétique de raison $-\frac{1}{3}$ et de 1^er terme $a_0 = \frac{1}{u_0-3} = -\frac{1}{2}$

b. $a_n = a_0 + nR = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{n}{3} = -\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{6}}(\mathbf{3}+\mathbf{2n})$

Et $u_n = \dfrac{1}{a_n} + 3 = \dfrac{1}{-\dfrac{1}{6}(3+2n)} + 3 = \dfrac{-6}{3+2n} + 3 = \dfrac{-6+9+6n}{3+2n} = \dfrac{\mathbf{3}+\mathbf{6n}}{\mathbf{3}+\mathbf{2n}}$

Corrigé Entraînement 5

a) $u_{n+1} = a_{n+1} - b_{n+1} = \dfrac{a_n+b_n}{2} - \dfrac{2a_n+b_n}{3} = \dfrac{3a_n+3b_n-4a_n-2b_n}{6} = \dfrac{b_n-a_n}{6}$

D'autre part : $u_n = a_n - b_n \Rightarrow -\dfrac{1}{6}u_n = \dfrac{-a_n+b_n}{6} = \dfrac{b_n-a_n}{6} = u_{n+1}$

La suite (u_n) est géométrique de **raison** $-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{6}}$ et de **1^er terme** $\boldsymbol{u_0} = a_0 - b_0 = 3 - 1 = \mathbf{2}$

Et $\boldsymbol{u_n} = \mathbf{2} \times \left(-\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{6}}\right)^{\boldsymbol{n}}$

b) $w_{n+1} = 4a_{n+1} + 3b_{n+1} = 4 \times \frac{a_n+b_n}{2} + 3 \times \frac{2a_n+b_n}{3} = 2a_n + 2b_n + 2a_n + b_n = 4a_n + 3b_n = \boldsymbol{w_n}$

La suite (w_n) est stationnaire et de **1^er terme** $\boldsymbol{w_0} = 4a_0 + 3b_0 = 12 + 3 = \mathbf{15}$ **donc** $\boldsymbol{w_n} = \mathbf{15}$

c) $a_n = \frac{3u_n+w_n}{7} = a_n = \frac{3\left(2\times\left(-\frac{1}{6}\right)^n\right)+15}{7} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{7}}\left(\mathbf{6} \times \left(-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{6}}\right)^{\boldsymbol{n}} + \mathbf{15}\right)$