

Corrigé Exercice 14

1) a) $\ln x = -2 \Leftrightarrow x = e^{-2} \Rightarrow S = \{e^{-2}\}$

b) $e^x = 3 \Leftrightarrow x = \ln 3 \Rightarrow S = \{\ln 3\}$

c) $e^x + 1 = 0 \Leftrightarrow e^x = -1 \Rightarrow S = \emptyset$

d) $3e^x - 5 = 2 \Leftrightarrow e^x = \frac{7}{3} \Leftrightarrow x = \ln\left(\frac{7}{3}\right) \Rightarrow S = \left\{\ln\frac{7}{3}\right\}$

e) $1 - 2\ln x = -5 \Leftrightarrow \ln x = 3 \Leftrightarrow x = e^3 \Rightarrow S = \{e^3\}$

f) $3\ln x + 2 = 0 \Leftrightarrow \ln x = -\frac{2}{3} \Leftrightarrow x = e^{-\frac{2}{3}} \Rightarrow S = \left\{e^{-\frac{2}{3}}\right\}$

2) a) $\ln(x-1) = 3 \Leftrightarrow x-1 = e^3 \Leftrightarrow x = 1 + e^3 \Rightarrow S = \{1 + e^3\}$

b) $e^{x+2} = 3 \Leftrightarrow x+2 = \ln 3 \Leftrightarrow x = \ln 3 - 2 \Rightarrow S = \{\ln 3 - 2\}$

c) $e^{1-2x} - 3 = 0 \Leftrightarrow 1 - 2x = \ln 3 \Leftrightarrow x = \frac{1-\ln 3}{2} \Rightarrow S = \left\{\frac{1-\ln 3}{2}\right\}$

d) $e^{4-x} - 2 = 0 \Leftrightarrow 4 - x = \ln 2 \Leftrightarrow x = 4 - \ln 2 \Rightarrow S = \{4 - \ln 2\}$

e) $\ln(-3x+1) = 2 \Leftrightarrow -3x+1 = e^2 \Leftrightarrow x = \frac{1-e^2}{3} \Rightarrow S = \left\{\frac{1-e^2}{3}\right\}$

3) a) $e^{3x} = e^x \Leftrightarrow 3x = x \Leftrightarrow x = 0 \Rightarrow S = \{0\}$

b) $e^{x-3} = e^{3x} \Leftrightarrow x-3 = 3x \Leftrightarrow 2x = -3 \Rightarrow S = \left\{-\frac{3}{2}\right\}$

c) $e^{x^2} = e \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = -1 \text{ ou } x = 1 \Rightarrow S = \{-1; 1\}$

d) $e^{x-2} = -1$ une exponentielle est toujours positive $\Rightarrow S = \emptyset$

e) $e^{1-x} = \frac{1}{e} = e^{-1} \Leftrightarrow 1-x = -1 \Leftrightarrow x = 2 \Rightarrow S = \{2\}$

f) $e^{5-2x} = 1 \Leftrightarrow 5-2x = 0 \Leftrightarrow 2x = 5 \Rightarrow S = \left\{\frac{5}{2}\right\}$

g) $\ln(6-3x) = 1 = \ln e \Leftrightarrow 6-3x = e \Leftrightarrow x = \frac{6-e}{3} \Rightarrow S = \left\{2 - \frac{e}{3}\right\}$

h) $\ln(1-2x) = \ln x \Leftrightarrow 1-2x = x \Leftrightarrow x = \frac{1}{3} \Rightarrow S = \left\{\frac{1}{3}\right\}$

i) $\ln(x-1) + \ln(2x+2) = 0 \Leftrightarrow \ln((x-1)(2x+2)) = 0 \Leftrightarrow (x-1)(2x+2) = 1$

$\Leftrightarrow 2x^2 - 3 = 0$ avec $\Delta = 24, x_1 = \frac{\sqrt{24}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$ et $x_2 = -\frac{\sqrt{6}}{2} \Rightarrow$

Comme $x_2 \notin D$, on a $S = \left\{\frac{\sqrt{6}}{2}\right\}$

j) $\ln\left(\frac{1-x}{x+3}\right) = 0 = \ln 1 \Leftrightarrow \frac{1-x}{x+3} = 1 \Leftrightarrow 1-x = x+3 \Leftrightarrow x = -1 \Rightarrow S = \{-1\}$

Un peu plus...

1) a) $\ln x + 5 = 4 \Leftrightarrow \ln x = -1 \Leftrightarrow x = e^{-1} \Rightarrow S = \left\{\frac{1}{e}\right\}$

b) $\ln x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = e^{\frac{1}{2}} \Rightarrow S = \left\{e^{\frac{1}{2}}\right\}$

c) $2 - \frac{1}{2}e^x = 0 \Leftrightarrow e^x = 4 \Leftrightarrow x = \ln 4 \Rightarrow S = \{\ln 4\}$

2) a) $\ln(2x-3) + 4 = 0 \Leftrightarrow 2x-3 = e^{-4} \Leftrightarrow x = \frac{3+e^{-4}}{2} \Rightarrow S = \left\{\frac{3+e^{-4}}{2}\right\}$

b) $\ln(x^2) + 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = e^{-2} \Leftrightarrow x = \sqrt{e^{-2}} = e^{-1}$ ou $x = -e^{-1} \Rightarrow S = \left\{-\frac{1}{e}; \frac{1}{e}\right\}$

c) $2 - \frac{1}{2}e^{x^2} = 0 \Leftrightarrow e^{x^2} = 4 \Leftrightarrow x^2 = \ln 4 \Leftrightarrow x = \sqrt{\ln 4}$ ou $x = -\sqrt{\ln 4} \Rightarrow S = \{-\sqrt{\ln 4}; \sqrt{\ln 4}\}$

3) a) $e^{4x+3} = e^{-1} \Leftrightarrow 4x+3 = -1 \Leftrightarrow 4x = -4 \Rightarrow S = \{-1\}$

b) $e^{\frac{1}{4}x+1} = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{4}x+1 = 0 \Leftrightarrow x+4 = 0 \Rightarrow S = \{-4\}$

c) $e^x e^{-x} = 3 \Leftrightarrow e^0 = 3 \Leftrightarrow 1 = 3 \Rightarrow S = \emptyset$

d) $\ln\left(\frac{3}{x}\right) = \ln(x+2) \Leftrightarrow \frac{3}{x} = x+2 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 = 0$
avec $\Delta = 16, x_1 = 1$ et $x_2 = -3$
La solution x_2 n'appartient pas au domaine de définition, donc $S = \{1\}$

e) $\ln(x-3) + \ln(2x+1) = 2\ln 2 \Leftrightarrow \ln((x-3)(2x+1)) = \ln 2^2 \Leftrightarrow (x-3)(2x+1) = 4 \Leftrightarrow 2x^2 - 5x - 7 = 0$
avec $\Delta = 81, x_1 = \frac{7}{2}$ et $x_2 = -1 \Rightarrow$ Comme $x_2 \notin D$, on a $S = \left\{\frac{7}{2}\right\}$

Corrigé Exercice 15

1) a) $2e^{2x} - e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow 2(e^x)^2 - e^x - 1 = 0$ avec $Y = e^x$ cela revient à $2Y^2 - Y - 1 = 0$
On a $\Delta = 9$ et $Y_1 = 1$; $Y_2 = -\frac{1}{2}$

On a donc les équations associées aux solutions : $e^{x_1} = 1$ et $e^{x_2} = -\frac{1}{2}$
 $\Leftrightarrow x = 0$ $\emptyset$

la deuxième n'a pas de solution, puisqu'une exponentielle est toujours positive. $\Rightarrow S = \{0\}$

b) $2e^x + e^{-x} = 3(e^{-x} - 1) \Leftrightarrow 2e^x + e^{-x} = 3e^{-x} - 3 \Leftrightarrow 2e^x - 2e^{-x} + 3 = 0$
Si on multiplie l'égalité par e^x : $2(e^x)^2 - 2e^0 + 3e^x = 0 \Leftrightarrow 2(e^x)^2 + 3e^x - 2 = 0$
Avec le changement de variable $Y = e^x$ cela revient à $2Y^2 + 3Y - 2 = 0$

On a $\Delta = 25$ et $Y_1 = \frac{1}{2}$; $Y_2 = -2$

$\Leftrightarrow e^{x_1} = \frac{1}{2}$ et $e^{x_2} = -2$

$\Leftrightarrow x_1 = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$ la deuxième n'a pas de solution, une exponentielle est toujours positive.

$\Rightarrow S = \{-\ln 2\}$

c) $(\ln x)^2 - 2 \ln x = 15 \Leftrightarrow (\ln x)^2 - 2 \ln x - 15 = 0$

On fait le changement de variable $Y = \ln x \Leftrightarrow Y^2 - 2Y - 15 = 0$

on a : $\Delta = 64$; $Y_1 = 5$ et $Y_2 = -3$

$\Leftrightarrow \ln x_1 = 5$ $\ln x_2 = -3$

$\Leftrightarrow x_1 = e^5$ $x_2 = e^{-3} \Rightarrow S = \{e^{-3}; e^5\}$

d) $(\ln x)^2 + \ln x - 2 = 0$ On pose $Y = \ln x \Leftrightarrow Y^2 + Y - 2 = 0$

avec $\Delta = 9$; $Y_1 = 1$ et $Y_2 = -2$

$\Leftrightarrow \ln x_1 = 1$ $\ln x_2 = -2$

$\Leftrightarrow x_1 = e$ $x_2 = e^{-2} \Rightarrow S = \left\{e; \frac{1}{e^2}\right\}$

e) On pose $Y = e^x$ l'équation revient à $Y^2 - 4Y + 1 = 0$ avec $\Delta = 20$

On a $Y_1 = \frac{4-\sqrt{20}}{2} = 2 - \sqrt{5}$ et $Y_2 = 2 + \sqrt{5}$

Soit $e^{x_1} = 2 - \sqrt{5}$ et $e^{x_2} = 2 + \sqrt{5}$

La 1^{ère} équation est sans solution car $2 - \sqrt{5} < 0$ Et $x_2 = \ln(2 + \sqrt{5}) \Rightarrow S = \{\ln(2 + \sqrt{5})\}$

2) a) $x \ln x = 0$ Un produit est nul si un des facteurs est nul

$\Leftrightarrow x = 0$ ou $\ln x = 0$

$0 \notin D$ $x = 1$

$\Rightarrow S = \{1\}$

b) $(e^x - 3)(\ln x - \ln 2) = 0$

$\Leftrightarrow e^x - 3 = 0$ ou $\ln x - \ln 2 = 0$

$\Leftrightarrow e^x = 3$ $\ln x = \ln 2$

$\Leftrightarrow x = \ln 3$ $x = 2 \Rightarrow S = \{\ln 3; 2\}$

3) a) $\begin{cases} \ln x + \ln y = 1 \\ \ln x - 2 \ln y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln x = 1 - \ln y \\ 1 - \ln y - 2 \ln y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln x = 1 - \ln y \\ \ln y = \frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln x = \frac{1}{3} \\ \ln y = \frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = e^{\frac{1}{3}} \\ y = e^{\frac{2}{3}} \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2e^x + e^y = 2(e+1) \\ -e^x + 2e^y = 4 - e \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2e^x + e^y = 2e + 2 \\ -2e^x + 4e^y = 8 - 2e \end{cases}$ par addition $\Rightarrow 5e^y = 10 \Rightarrow y = \ln\left(\frac{10}{5}\right) = \ln 2$

et $\begin{cases} 2e^x + e^y = 2(e+1) \\ -e^x + 2e^y = 4 - e \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4e^x - 2e^y = -4e - 4 \\ -e^x + 2e^y = 4 - e \end{cases} \Rightarrow$ par addition $-5e^x = -5e \Leftrightarrow x = 1$

On a donc $\begin{cases} x = 1 \\ y = \ln 2 \end{cases}$

Corrigé Exercice 16

1) a. $f'(x) = 1e^x + xe^x = (x+1)e^x$ et $g'(x) = \frac{1e^x - xe^x}{(e^x)^2} = \frac{(1-x)e^x}{e^{2x}}$

L'exponentielle étant toujours positive, on a :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$x+1$	$-$	0	$+$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$-\frac{1}{e}$	$\nearrow$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$1-x$	$+$	0	$-$
$g'(x)$	$+$	0	$-$
$g(x)$	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$

b. $xe^x = \frac{x}{e^x} \Leftrightarrow (e^x)^2 = \frac{x}{e^x} \Leftrightarrow e^{2x} = 1 \Leftrightarrow 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ et $f(0) = 0$

Donc le seul point commun des deux courbes est bien le point $(0; 0)$

c. $f(0) = 0$; $f'(0) = 1$; $g(0) = 0$ et $g'(0) = 1$. Donc comme $f(0) = g(0)$ et que $f'(0) = g'(0)$, les deux tangentes ont la même équation : $y = 1(x - 0) + 0 \Leftrightarrow y = x$

Les deux courbes ont bien une tangente commune en zéro (qui est la première bissectrice)

Corrigé Exercice 17

1) $e^x - x^n = 0 \Leftrightarrow e^x = x^n \Leftrightarrow \ln(e^x) = \ln(x^n) \Leftrightarrow x = n \ln x \Leftrightarrow \frac{x}{n} = \ln x \Leftrightarrow \ln x - \frac{x}{n} = 0$

2) On a $f_n(n) = \ln(n) - 1$ et, d'après la dérivée, on a :

x	0	n	$+\infty$
$n-x$	$ $	$+$	$-$
nx	$ $	$+$	$+$
$f'_n(x)$	$ $	$+$	$-$
$f_n(x)$	$ $	$\nearrow \ln(n) - 1 \searrow$	

Or, pour appliquer le TVi, pour l'équation $f_n(x) = 0$, il faut que : $\ln(n) - 1 > 0 \Leftrightarrow \ln(n) > 1 \Leftrightarrow n > e$

Donc, dans $\mathbb{N}$, pour $n \geq 3$

Pour $n \geq 3$, l'équation (E_1) admet deux solutions