Savoir FL. 5 : TVi généralisé

Applications directes

On donne les tableaux de variations suivants :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f(x)$	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

x	0		2		$+\infty$
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$2e$

x	1		e		$+\infty$
$h(x)$	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$	0

x	$-\infty$		$\frac{1}{e}$		$+\infty$
$i(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	-1

x	0		$\ln 2$		$+\infty$
$j(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

x	$-\infty$		$+\infty$
$k(x)$	1	$\searrow$	0

1) Détailler les justifications :

a. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ a une seule solution sur $[-1;\ +\infty[$

b. Montrer que l'équation $g(x) = 8$ a une unique solution sur $]-\infty;\ +\infty[$

c. Montrer que l'équation $h(x) = 1$ admet une unique solution sur $[e;\ +\infty[$

d. Montrer que l'équation $i(x) = 0$ admet deux solutions sur $\mathbb{R}$

e. Montrer que l'équation $j(x) = 0$ a une seule solution sur $[\ln 2\ ;\ +\infty[$

f. Montrer que l'équation $k(x) = \frac{1}{2}$ a une unique solution sur $\mathbb{R}$

2) Déterminer, sans justifier, le nombre de solution des équations suivantes (préciser l'intervalle si besoin) :

a. $f(x) = -1$ sur $\mathbb{R}$

b. $g(x) = e$ a sur $]-\infty;\ +\infty[$

c. $h(x) = -\frac{1}{e}$ sur $[1\ ;\ +\infty[$

d. $i(x) = -2$ sur $\mathbb{R}$

e. $j(x) = -2\ln 2$ sur $]0;\ +\infty[$

f. $k(x) = 1$ sur $\mathbb{R}$

Extrait bac 1

On considère la fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = xe^{-x} - 0{,}1$.

1. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

2. Étudier les variations de f sur $[0\ ;\ +\infty[$ et dresser le tableau de variations.

3. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution notée α sur l'intervalle $[1\ ;\ +\infty[$

Extrait bac 2

Soit g la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que, pour tout réel x, $g(x) = -2x^3 + x^2 - 1$.

1. a. Étudier les variations de la fonction g .

b. Déterminer les limites de la fonction g en $-\infty$ et en $+\infty$.

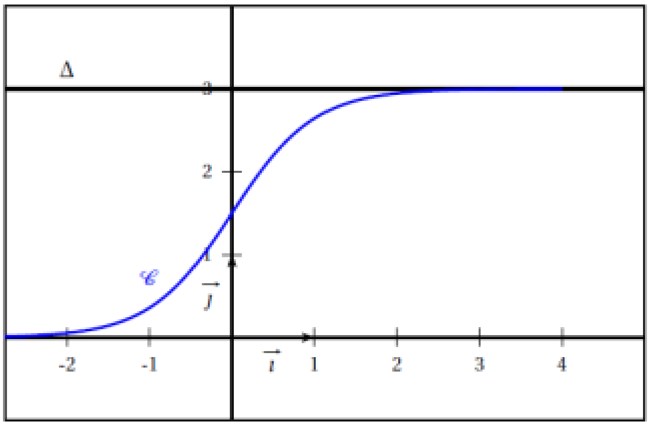
2. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$, notée α.

Extrait bac 3

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{3}{1+e^{-2x}}$$

Sur le graphique ci-contre, on a tracé, dans un repère orthogonal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, la courbe représentative $\mathcal{C}$ de la fonction f et la droite Δ d'équation $y = 3$.



1. Démontrer que la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

2. Justifier que la droite Δ est asymptote à la courbe $\mathcal{C}$.

3. Démontrer que l'équation $f(x) = 2{,}999$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$.
Déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

Extrait bac 4

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{3}{4+6e^{-2x}}$$

Affirmation : L'équation $f\ (x) \ = \ 0{,}5$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$

L'affirmation est-elle vraie ou fausse ? Justifier

Corrections Savoir FL. 5

Corrigé Entraînement

1) a. La fonction f est continue et strictement décroissante sur $[-1;\ +\infty[$, avec $f(-1) > 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) < 0$.
D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ a **une seule solution sur** $[\mathbf{-1};\ +\infty[$

b. La fonction g est continue et strictement décroissante sur $]0\ ;\ 2]$, avec $\lim\limits_{x\to 0} g(x) > 8$ et $g(1) < 8$
D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 8$ a **une seule solution sur** $]0\ ;\ 2]$
Sur $[2; +\infty[$, la fonction g est continue et strictement croissante, mais $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) < 8$: l'équation $g(x) = 8$ n'a donc pas de solution sur $[2; +\infty[$
En conclusion, l'équation $g(x) = 8$ a **une seule solution sur** $]0\ ;\ +\infty[$

c. La fonction h est continue et strictement décroissante sur $[e;\ +\infty[$, avec $h(e) > 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) < 1$.
D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $h(x) = 1$ a **une seule solution sur** $[\boldsymbol{e};\ +\infty[$

d. La fonction i est continue et strictement croissante sur $\left]-\infty; \frac{1}{e}\right]$ avec $\lim\limits_{x\to-\infty} i(x) < 0$ et $i\left(\frac{1}{e}\right) > 0$
D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $i(x) = 0$ a **une solution sur** $\left]-\infty; \boldsymbol{\frac{1}{e}}\right]$
La fonction i est continue et strictement décroissante sur $\left[\frac{1}{e}; +\infty\right[$ avec $i\left(\frac{1}{e}\right) > 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} i(x) < 0$
D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $i(x) = 0$ a **une solution sur** $\left[\boldsymbol{\frac{1}{e}}; +\infty\right[$
En conclusion, l'équation $i(x) = 0$ admet deux solutions sur $\mathbb{R}$

e. La fonction j est continue et strictement croissante sur $[\ln 2\ ;\ +\infty[$, avec $j(\ln 2) < 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} j(x) > 0$.
D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $j(x) = 0$ a **une seule solution sur** $[\ln 2\ ;\ +\infty[$

f. La fonction k est continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}$, avec $\lim\limits_{x\to-\infty} k(x) > \frac{1}{2}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} k(x) < \frac{1}{2}$
D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $k(x) = \frac{1}{2}$ a **une seule solution sur** $\mathbb{R}$

2) a. 1 seule solution, dans $[-1;\ +\infty[$

b. 2 solutions, l'une dans $]0;\ 2[$ et l'autre dans $]2;\ +\infty[$

c. $-\frac{1}{e} \simeq -0{,}7 \Rightarrow$ 1 seule solution, dans $[1\ ;\ e]$

d. $i(x) = -2$ sur $\mathbb{R}$ 1 seule solution, dans $\left]-\infty; \frac{1}{e}\right]$

e. $-2\ln 2 \simeq -1{,}4 \Rightarrow$ 2 solutions, l'une dans $]0; \ln 2\ [$ et l'autre dans $]\ln 2\ ;\ +\infty[$

f. Aucune solution (la limite n'est jamais atteinte, ce n'est pas une solution)

Corrigé Extrait bac 1

1. $f(x) = -(-x)e^{-x} - 0{,}1$ donc par composée de limites, $\lim\limits_{x \to +\infty} -(-x)e^{-x} = \lim\limits_{Y \to -\infty} -Ye^{y}$

Or, d'après les croissances comparées, on a $\lim\limits_{Y \to -\infty} -Ye^{y} = 0$

Donc, par somme, $\lim\limits_{x \to +\infty} \boldsymbol{f(x)} = 0 - 0{,}1 = \mathbf{-0,1}$

2. $f'(x) = 1e^{-x} + x(-e^{-x}) = (1-x)e^{-x}$

x	0		1		$+\infty$
$1-x$	|	$+$	0	$-$	
e^{-x}	|	$+$	|	$+$	
$f'(x)$	|	$+$	$\mathbf{0}$	$-$	
$f(x)$	$\mathbf{-0,1}$	↗	$\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{e}} \mathbf{- 0,1}$	↘	$\mathbf{-0,1}$

3. Sur $[1; +\infty[$ la fonction f est continue et strictement décroissante, avec $f(1) > 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) < 0$

Donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $[1\,;\, +\infty[$

Corrigé Extrait bac 2

1. a. $g'(x) = -6x^2 + 2x = 2x(-3x+1)$ les racines sont 0 et $\frac{1}{3}$

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$g'(x)$	|	$-$	$\mathbf{0}$	$+$	$\mathbf{0}$	$-$	
$g(x)$	$+\infty$	↘	$\mathbf{-1}$	↗	$-\frac{\mathbf{26}}{\mathbf{27}}$	↘	$-\infty$

b. Une fonction polynôme a la même limite en l'infini que son terme de plus haut degré

$\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} -2x^3 = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} -2x^3 = -\infty$

2. Sur $]-\infty; 0]$, la fonction g est continue et strictement décroissante, avec $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) > 0$ et $g(0) < 0$.

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution sur cet intervalle.

Pour $x \geq 0$, on a $g(x) < 0$ donc l'équation $g(x) = 0$ n'a pas de solution sur cet intervalle.

On peut donc conclure que l'équation $\boldsymbol{g(x) = 0}$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$.

Corrigé Extrait bac 3

1. $f'(x) = \frac{-3(-2e^{-2x})}{(1+e^{-2x})^2} = \frac{\boldsymbol{6e^{-2x}}}{\boldsymbol{(1+e^{-2x})^2}}$ Les exponentielles, comme les carrés, sont toujours positifs.

On a donc pour tout x, $f'(x) > 0$ et **la fonction $\boldsymbol{f}$ est strictement croissante sur** $\mathbb{R}$.

2. $\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} -2x = -\infty \\ \lim\limits_{Y \to -\infty} e^{Y} = 0 \end{cases}$ donc, par composées de limites, on a $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-2x} = 0$

On a donc $\lim\limits_{x \to +\infty} 1 + e^{-2x} = 1$ et par quotient de limites, $\lim\limits_{x \to +\infty} \boldsymbol{f(x)} = \frac{3}{1} = \mathbf{3}$

La droite Δ d'équation $\boldsymbol{y = 3}$ est bien asymptote à la courbe $\boldsymbol{\mathcal{C}}$

3. On a $\lim\limits_{x \to -\infty} 1 + e^{-2x} = \lim\limits_{Y \to +\infty} 1 + e^{Y} = +\infty$ donc par quotient, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$

La fonction f est continue, strictement croissante sur $\mathbb{R}$, avec $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) < 2{,}999$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) > 2{,}999$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 2{,}999$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$.

À la calculatrice, on trouve $\mathbf{4} < \alpha < 4{,}01$

Corrigé Extrait bac 4

L'affirmation est vraie

C'est le même exercice que précédemment, sans les questions intermédiaires….

$f'(x) = \frac{-3(-12e^{-2x})}{(4+6e^{-2x})^2} = \frac{\boldsymbol{36e^{-2x}}}{(4+6e^{-2x})^2}$ Exponentielles et carrés, sont toujours positifs.

On a donc pour tout x, $f'(x) > 0$ et **la fonction $\boldsymbol{f}$ est strictement décroissante sur** $\mathbb{R}$.

$\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} -2x = -\infty \\ \lim\limits_{Y \to -\infty} e^{Y} = 0 \end{cases}$ donc, par composées de limites, on a $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-2x} = 0$

On a donc $\lim\limits_{x \to +\infty} 4 + 6e^{-2x} = 4$ et par quotient de limites, $\boldsymbol{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)} = \frac{3}{4}$

$\lim\limits_{x \to -\infty} 4 + 6e^{-2x} = \lim\limits_{Y \to +\infty} 4 + 6e^{Y} = +\infty$ donc par quotient, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$

La fonction f est continue, strictement croissante sur $\mathbb{R}$, avec $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) < 0{,}5$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) > 0{,}5$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0{,}5$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$.