Entraînements Sujets bac

Sujet n°1 -

Partie A

Soit u la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $u(x) = \ln(x) + x - 3$

1. Justifier que la fonction u est strictement croissante sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

2. Démontrer que l'équation $u(x) = 0$ admet une unique solution α comprise entre 2 et 3.

3. En déduire le signe de $u(x)$ en fonction de x.

Partie B

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)[\ln(x) - 2] + 2$
On appelle $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal.

2. a. Démontrer que, pour tout réel x de l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{u(x)}{x^2}$ où u est la fonction définie dans la partie A.

b. En déduire le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

Partie C

Soit $\mathcal{C}'$ la courbe d'équation $y = \ln(x)$

1. Démontrer que, pour tout réel x de l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$, $f(x) - \ln(x) = \dfrac{2 - \ln(x)}{x}$
En déduire que les courbes $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ ont un seul point commun dont on déterminera les coordonnées.

Sujet n°2 -

On considère la fonction f définie et dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par : $f(x) = x + 1 + \frac{x}{e^x}$
On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$

1. Donner les valeurs exactes les plus simplifiées de $f(-1)$; $f(0)$ et $f(1)$

2. Soit g la fonction définie et dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 1 - x + e^x$

a. Dresser, en le justifiant, le tableau donnant les variations de la fonction g sur $\mathbb{R}$

b. En déduire le signe de $g(x)$.

3. On appelle f' la dérivée de la fonction f sur $\mathbb{R}$. Démontrer que, pour tout réel x : $f'(x) = e^{-x}g(x)$

4. En déduire le tableau de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

5. a. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution réelle α sur $\mathbb{R}$.
Donner un encadrement de α au dixième près.

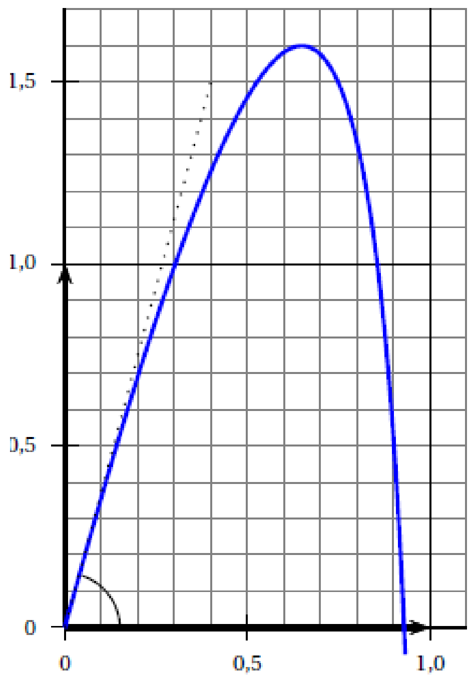
b. En déduire le tableau de signe de $f(x)$

6. a. Démontrer que la droite T d'équation $y = 2x + 1$ est tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0.

b. Étudier la position relative de la courbe $\mathcal{C}$ et de la droite T .

Sujet n°3 -

Lors d'une expérience en laboratoire, on lance un projectile dans un milieu fluide. L'objectif est de déterminer pour quel angle de tir θ par rapport à l'horizontale la hauteur du projectile ne dépasse pas 1,6 mètre. Comme le projectile ne se déplace pas dans l'air mais dans un fluide, le modèle parabolique usuel n'est pas adopté.



On modélise ici le projectile par un point qui se déplace, dans un plan vertical, sur la courbe représentative de la fonction f définie sur l'intervalle [0; 1[par :

$$f(x) = bx + 2\ln(1-x)$$

où b est un paramètre réel supérieur ou égal à 2, x est l'abscisse du projectile, $f(x)$ son ordonnée, toutes les deux exprimées en mètres.

1. La fonction f est dérivable sur l'intervalle [0; 1[. On note f' sa fonction dérivée.
On admet que la fonction f possède un maximum sur l'intervalle [0; 1[et que, pour tout réel x de l'intervalle [0; 1[:

$$f'(x) = \frac{-bx+b-2}{1-x}$$

Montrer que le maximum de la fonction f est égal à $b - 2 + 2\ln\left(\frac{2}{b}\right)$

2. Déterminer pour quelles valeurs du paramètre b la hauteur maximale du projectile ne dépasse pas 1,6 m.

3. Dans cette question, on choisit $b = 5{,}69$.
L'angle de tir θ correspond à l'angle entre l'axe des abscisses et la tangente à la courbe de la fonction f au point d'abscisse 0 comme indiqué sur le schéma donné ci-dessus.
Déterminer une valeur approchée au dixième de degré près de l'angle θ.

Sujet n°4 -

Partie A

On considère la fonction f définie sur l'intervalle [0; 10] par : $f(x) = \dfrac{1}{0{,}5+100e^{-x}}$

On note f' la fonction dérivée de f sur l'intervalle $[0\,;10]$.

1. Montrer que, pour tout réel x dans l'intervalle $[0;\ 10]$, on a : $f'(x) = \dfrac{100e^{-x}}{(0{,}5+100e^{-x})^2}$

On note f'' la fonction dérivée seconde de f sur l'intervalle $[0;\ 10]$.

Un logiciel de calcul formel fournit l'expression suivante de $f''(x)$: $f''(x) = \dfrac{100e^{-x}(100e^{-x}-0{,}5)}{(0{,}5+100e^{-x})^3}$

2. a. Montrer que, dans l'intervalle $[0;\ 10]$, l'inéquation $100e^{-x} - 0{,}5 \geq 0$ est équivalente à l'inéquation $x \leq -ln(0{,}005)$.

b. En déduire le tableau de signes de la fonction f'' sur l'intervalle $[0;\ 10]$.

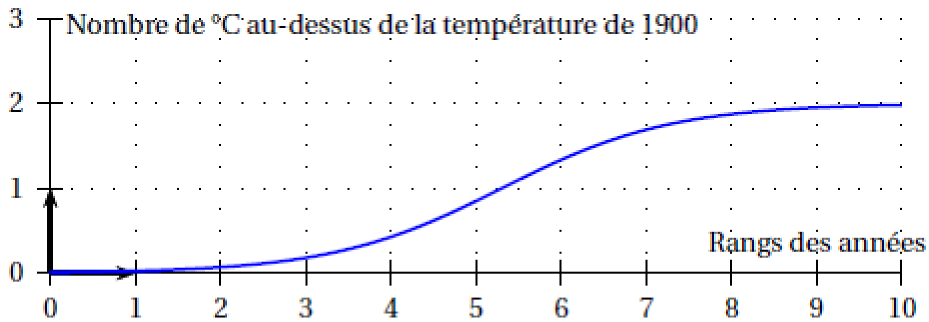
3. On appelle $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f tracée dans un repère.
Montrer, à l'aide de la question 2, que la courbe $\mathcal{C}_f$ admet un point d'inflexion noté I, dont on précisera la valeur exacte de l'abscisse.

4. En utilisant les résultats de la question 2, déterminer l'intervalle sur lequel la fonction f est concave.

Partie B

Dans toute cette partie les températures seront exprimées en degrés Celsius, notés °C.

La COP21, conférence sur les changements climatiques des Nations Unies, a adopté le 12 décembre 2015 le premier accord universel sur le climat, appelé accord de Paris, signé par 195 pays.
Cet accord confirme l'objectif, d'ici l'année 2100, que la température terrestre ne dépasse pas de plus de 2°C la température de l'année 1900.
Dans cette partie, on modélise, par la fonction f de la partie A, une évolution de température possible permettant d'atteindre l'objectif de l'accord de Paris.
La courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de la fonction est tracée ci-dessous, et I est son point d'inflexion.
Sur l'axe des abscisses, l'année 1900 correspond à 0 et une unité représente 25 ans, donc l'année 1925 correspond à 1.
Sur l'axe des ordonnées, on a représenté le nombre de degrés Celsius au-dessus de la température de 1900.



1. a. Calculer $f(10)$, en arrondissant le résultat au centième.

b. En déduire qu'en 2150, avec ce modèle, l'objectif de l'accord de Paris sera respecté.

2. a. En utilisant la partie A, déterminer l'année correspondant à l'abscisse du point I d'inflexion de la courbe $\mathcal{C}_f$. Arrondir le résultat à l'unité.

b. Calculer, pour cette année-là, le nombre de degrés Celsius supplémentaires par rapport à 1900.

3. On appelle vitesse du réchauffement climatique la vitesse d'augmentation du nombre de degrés Celsius. On admet que, à partir de 1900, la vitesse du réchauffement climatique est modélisée par la fonction f'.

a. Est-il vrai de dire qu'après 2033 la température terrestre diminuera? Justifier la réponse.

b. Est-il vrai de dire qu'après 2033 la vitesse du réchauffement climatique diminuera? Justifier la réponse.

4. Pour sauvegarder les îles menacées par la montée des eaux, la température terrestre ne doit pas dépasser de plus de 1,5 °C la température de l'année 1900.
Déterminer l'année au cours de laquelle la température terrestre atteindra ce seuil, selon ce modèle.

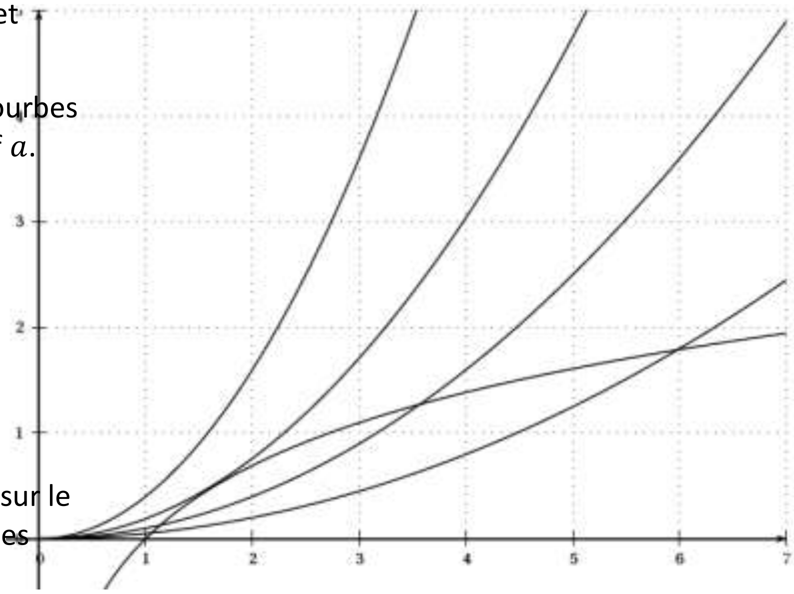
Sujet n°5 -

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \ln x$

Pour tout réel a strictement positif, on définit sur $]0\,;\,+\infty[$ la fonction g_a par $g_a(x) = ax^2$.

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f et Γ_a celle de la fonction g_a dans un repère du plan.

Le but de l'exercice est d'étudier l'intersection des courbes $\mathcal{C}$ et Γ_a suivant les valeurs du réel strictement positif a.



Partie A

On a construit sur le graphique ci-contre les courbes $\mathcal{C}$, $\Gamma_{0,05}$, $\Gamma_{0,1}$, $\Gamma_{0,19}$ et $\Gamma_{0,4}$.

1. Nommer les différentes courbes sur le graphique. Aucune justification n'est demandée.

2. Utiliser le graphique pour émettre une conjecture sur le nombre de points d'intersection de $\mathcal{C}$ et Γ_a suivant les valeurs (à préciser) du réel a.

Partie B

Pour un réel a strictement positif, on considère la fonction h_a définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$h_a(x) = \ln x - ax^2$$

1. Justifier que x est l'abscisse d'un point M appartenant à l'intersection de $\mathcal{C}$ et Γ_a si et seulement si $h_a(x) = 0$

2. a. On admet que la fonction h_a est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$, et on note h'_a la dérivée de la fonction h_a sur cet intervalle. Le tableau de variation de la fonction h_a est donné ci-contre.

x	0		$\frac{1}{\sqrt{2a}}$		$+\infty$
$h'_a(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$h_a(x)$	‖ $-\infty$	↗	$\frac{-1-\ln(2a)}{2}$	↘	

Justifier, par le calcul, le signe de $h'_a(x)$ pour x appartenant à $]0\,;\,+\infty[$.

(…)

3. Dans cette question et uniquement dans cette question, on suppose que $a = 0{,}1$.

a. Justifier que, dans l'intervalle $\left]0\,;\frac{1}{\sqrt{0{,}2}}\right]$ l'équation $h_{0,1}(x) = 0$ admet une unique solution.

On admet que cette équation a aussi une seule solution dans l'intervalle $\left]\frac{1}{\sqrt{0{,}2}}\,;\,+\infty\right[$

b. Quel est le nombre de points d'intersection de $\mathcal{C}$et $\Gamma_{0,1}$?

4. Dans cette question et uniquement dans cette question, on suppose que $a = \frac{1}{2e}$.

a. Déterminer la valeur du maximum de $h_{\frac{1}{2e}}$

b. En déduire le nombre de points d'intersection des courbes $\mathcal{C}$ et $\Gamma_{\frac{1}{2e}}$. Justifier.

5. Quelles sont les valeurs de a pour lesquelles $\mathcal{C}$ et Γ_a n'ont aucun point d'intersection ? Justifier.

Sujet n°6 -

Soit a un nombre réel fixé non nul.
Le but de l'exercice est d'étudier la suite (u_n) définie par : $u_0 = a$ et, pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = e^{2u_n} - e^{u_n}$

On remarquera que cette égalité peut aussi s'écrire : $u_{n+1} = e^{u_n}(e^{u_n} - 1)$.

1. Soit g la fonction définie pour tout réel x par : $g(x) = e^{2x} - e^x - x$.

a. Calculer $g'(x)$ et prouver que, pour tout réel x : $g'(x) = (e^x - 1)\,(2e^x + 1)$.

b. Déterminer les variations de la fonction g et donner la valeur de son minimum.

c. En remarquant que $u_{n+1} - u_n = g(u_n)$, étudier le sens de variation de la suite (u_n)

2. Dans cette question, on suppose que $a \leq 0$.

a. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n \leq 0$

b. Déduire des questions précédentes que la suite (u_n)est convergente.

c. Dans le cas où a vaut 0, donner la limite de la suite (u_n)

3. Dans cette question, on suppose que $a > 0$.
La suite (u_n) étant croissante, la question 1. permet d'affirmer que, pour tout entier naturel n, $u_n \geq a$.

a. Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} - u_n \geq g(a)$.

b. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n \geq a + n \times g(a)$.

c. Déterminer la limite de la suite(u_n)

Sujet n°7 -

Les parties A et B sont indépendantes

Une image numérique en noir et blanc est composée de petits carrés (pixels) dont la couleur va du blanc au noir en passant par toutes les nuances de gris. Chaque nuance est codée par un réel *x* de la façon suivante :

- $x = 0$ pour le blanc ;
- $x = 1$ pour le noir ;
- $x = 0{,}01$; $x = 0{,}02$ et ainsi de suite jusqu'à $x = 0{,}99$ par pas de 0,01 pour toutes les nuances intermédiaires (du clair au foncé).

L'image A, ci-après, est composée de quatre pixels et donne un échantillon de ces nuances avec leurs codes.

Un logiciel de retouche d'image utilise des fonctions numériques dites « fonctions de retouche ».
Une fonction f définie sur l'intervalle [0 ; 1] est dite « fonction de retouche » si elle possède les quatre propriétés suivantes :

- $f(0) = 0$;
- $f(1) = 1$;
- f est continue sur l'intervalle [0 ; 1] ;
- f est croissante sur l'intervalle [0 ; 1].

Une nuance codée x est dite assombrie par la fonction f si $f(x) > x$, et éclaircie, si $f(x) < x$.
Ainsi, si $f(x) = x^2$, un pixel de nuance codée 0,2 prendra la nuance codée $0{,}2^2 = 0{,}04$. L'image A sera transformée en l'image B ci-dessous.

Si $f(x) = \sqrt{x}$, la nuance codée 0,2 prendra la nuance codée $\sqrt{0{,}2} \approx 0{,}45$. L'image A sera transformée en l'image C ci-dessous.

0,20	0,40
0,60	0,80

Image A

0,04	0,16
0,36	0,64

Image B

0,45	0,63
0,77	0,89

Image C

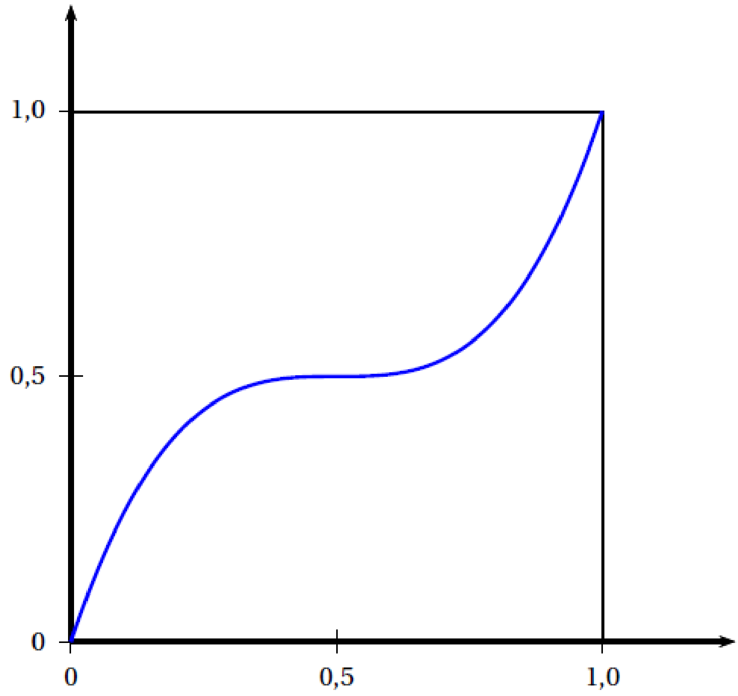
Partie A

1. On considère la fonction f_1 définie sur l'intervalle [0 ; 1] par : $f_1(x) = 4x^3 - 6x^2 + 3x$.

a. Démontrer que la fonction f_1 est une fonction de retouche.

b. Résoudre graphiquement l'inéquation $f_1(x) \leq x$, à l'aide du graphique donné en annexe, à rendre avec la copie, en faisant apparaître les pointillés utiles. Interpréter ce résultat en termes d'éclaircissement ou d'assombrissement.

Annexe :
Courbe représentative de la fonction f_1



2. On considère la fonction f_2 définie sur l'intervalle [0 ; 1] par : $f_2(x) = \ln[1 + (e - 1)x]$
On admet que f_2 est une fonction de retouche.
On définit sur l'intervalle [0 ; 1] la fonction g par : $g(x) = f_2(x) - x$.

a. Établir que, pour tout x de l'intervalle [0 ; 1] : $g'(x) = \frac{(e-2)-(e-1)x}{1+(e-1)x}$

b. Déterminer les variations de la fonction g sur l'intervalle [0 ; 1].
Démontrer que la fonction g admet un maximum en $\frac{e-2}{e-1}$, dont une valeur arrondie au centième est 0,12.

c. Établir que l'équation $g(x) = 0{,}05$ admet sur l'intervalle [0 ; 1] deux solutions α et β, avec $\alpha < \beta$.

On admettra que : $0{,}08 < \alpha < 0{,}09$ et que : $0{,}85 < \beta < 0{,}86$.

Partie B

On remarque qu'une modification de nuance n'est perceptible visuellement que si la valeur absolue de l'écart entre le code de la nuance initiale et le code de la nuance modifiée est supérieure ou égale à 0,05.

1. Dans l'algorithme décrit ci-contre, f désigne une fonction de retouche. Quel est le rôle de cet algorithme ?

2. Quelle valeur affichera cet algorithme si on l'applique à la fonction f_2 définie dans la deuxième question de la **partie A**?

Variables :	x (nuance initiale)
	y (nuance retouchée)
	E (écart)
	c (compteur)
	k
Initialisation :	c prend la valeur 0
Traitement :	Pour k allant de 0 à 100, faire
	x prend la valeur $\frac{k}{100}$
	y prend la valeur $f(x)$
	E prend la valeur $\lvert y - x \rvert$
	Si $E \geqslant 0{,}05$, faire
	c prend la valeur $c+1$
	Fin si
	Fin pour
Sortie :	Afficher c

Sujet n°8 -

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$, et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = e \times \sqrt{u_n}$

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $1 \leq u_n \leq e^2$

2. a. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

b. En déduire la convergence de la suite (u_n)

3. Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = \ln(u_n) - 2$.

a. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

b. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $v_n = -\frac{1}{2^{n-1}}$

c. En déduire une expression de u_n en fonction de l'entier naturel n.

d. Calculer la limite de la suite (u_n)

4. Dans cette question, on s'interroge sur le comportement de la suite (u_n) si l'on choisit d'autres valeurs que 1 pour u_0. Pour chacune des affirmations ci-dessous, indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant.

Affirmation 1 : « Si $u_0 = 2018$, alors la suite (u_n) est croissante. »

Affirmation 2 : « Si $u_0 = 2$, alors pour tout entier naturel n, $1 \leq u_n \leq e^2$ »

Affirmation 3 : « La suite (u_n) est constante si et seulement si $u_0 = 0$. »