Corrigé Savoir Nc.2

Corrigé Entraînement 1

1) a) $\overline{z_1} = -i - 4 = \boldsymbol{-4 - i}$ et $\overline{z_2} = \boldsymbol{1 + \left(1 + \sqrt{2}\right)i}$

b) $a.\bar{a} = \left(-\sqrt{2}\right)^2 = \boldsymbol{2}$ et $b.\bar{b} = (-2)^2 + 5^2 = \boldsymbol{29}$

2) $z_3 = \frac{1}{\sqrt{3}-i\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}+i\sqrt{2}}{\sqrt{3}^2+\sqrt{2}^2} = \frac{\sqrt{3}+i\sqrt{2}}{3+2} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{5} + i\frac{\sqrt{2}}{5}}$ $z_4 = \frac{2+i}{2-i} = \frac{(2+i)(2+i)}{2^2+1^2} = \frac{4+4i+i^2}{5} = \frac{3+4i}{5} = \boldsymbol{\frac{3}{5} + \frac{4}{5}i}$

$z_5 = \frac{4-i}{2i} = \frac{(4-i)(-2i)}{4} = \frac{-2-8i}{4} = \boldsymbol{-\frac{1}{2} - 2i}$

3) $\overline{f(z)} = \overline{(z-\imath)(\bar{z}+\imath)} = (\overline{z-\imath})(\overline{\bar{z}+\imath}) = (\bar{z}+i)(z-i) = (z-i)(\bar{z}+i) = f(z)$

On a $\boldsymbol{\overline{f(z)} = f(z)}$ donc $f(z)$ est bien un réel

Corrigé Entraînement 2

1) a) $\overline{z_1} = \boldsymbol{-2i}$ et $\overline{z_2} = 3 + \left(\boldsymbol{-2 + \sqrt{3}}\right)i$

b) $z_3.\overline{z_3} = (1 - \sqrt{(2)^2} = 1 - 2\sqrt{2} + 2 = \boldsymbol{3 - 2\sqrt{2}}$ et $z_4.\overline{z_4} = 2^2 + (-2)^2 = \boldsymbol{8}$

2) $z_5 = \frac{1}{3i-4} = \frac{-3i-4}{3^2+(-4)^2} = \frac{-4-3i}{9+16} = \boldsymbol{\frac{-4}{25} - \frac{3}{25}i}$ $z_6 = \frac{3+i}{1-3i} = \frac{(3+i)(1+3i)}{1+9} = \frac{3+9i+i-3}{1+9} = \frac{10i}{10} = \boldsymbol{i}$

Développer avant de passer au conjugué $z_7 = \frac{2i}{(1+i)(2-3i)} = \frac{2i}{2-3i+2i+3} = \frac{2i}{5-i} = \frac{2i(5+i)}{25+1} = \frac{-2+10i}{26} = \boldsymbol{-\frac{1}{13} + \frac{5}{13}i}$

3) $\bar{\mathcal{Z}} = (\overline{1+\imath z}) - (\overline{1-\imath\bar{z}}) = (1 - i\bar{z}) - (1 + iz) = -\left(-(1-i\bar{z}) + (1+iz)\right) = -\mathcal{Z}$

On a donc, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\boldsymbol{\bar{\mathcal{Z}} = -\mathcal{Z}}$ donc $\boldsymbol{\mathcal{Z} \in i\mathbb{R}}$

Savoir Nc. 2 - Conjugués

Entraînement 1

1) a) Exprimer les conjugués des nombres complexes suivants : $z_1 = i - 4$ et $z_2 = 1 - (1 + \sqrt{2})i$

b) On donne les nombres complexes $a = -i\sqrt{2}$ et $b = -2 + 5i$. Calculer $a.\bar{a}$ et $b.\bar{b}$

2) Donner l'écriture algébrique des nombres complexes suivants : $z_3 = \dfrac{1}{\sqrt{3} - i\sqrt{2}}$ $\quad z_4 = \dfrac{2+i}{2-i}$ $\quad z_5 = \dfrac{4-i}{2i}$

3) On donne la fonction dans Ê définie pour tout nombre complexe z par : $g(z) = (z - i)(\bar{z} + i)$
Montrer que, pour tout $z \in$ Ê, on a $g(z)$ est un réel

Entraînement 2

1) a) Exprimer les conjugués des nombres complexes suivants : $z_1 = 2i$ et $z_2 = 3 + (2 - \sqrt{3})i$

b) On donne $z_3 = 1 - \sqrt{2}$ et $z_4 = 2 - 2i$. Calculer $z_3.\overline{z_3}$ et $z_4.\overline{z_4}$

2) Donner l'écriture algébrique des nombres complexes suivants : $z_5 = \dfrac{1}{3i - 4}$ $\quad z_6 = \dfrac{3+i}{1-3i}$ $\quad z_7 = \dfrac{2i}{(1+i)(2-3i)}$

3) Soit le nombre complexe $\mathcal{Z}$ définit pour tout nombre complexe z par : $\mathcal{Z} = (1 + iz) - (1 - i\bar{z})$
Montrer que, pour tout $z \in$ Ê, on a $\mathcal{Z} \in i\mathbb{R}$