Corrections Savoirs Si. 5

Exercice 14 : Convergente ou pas ?

a) (u_n) est décroissante et minorée
$\Rightarrow$ **Convergente**

b) (u_n) est croissante et majorée
$\Rightarrow$ **Convergente**

c) (u_n) est croissante et minorée
$\Rightarrow$ **On ne peut pas conclure**

d) (u_n) est croissante et majorée
$\Rightarrow$ **Convergente**

e) (u_n) est croissante et majorée
$\Rightarrow$ **Convergente**

f) (u_n) est croissante et minorée
$\Rightarrow$ **On ne peut pas conclure**

g) (u_n) est décroissante et minorée par $\sqrt{3}$
$\Rightarrow$ **Convergente**

h) (u_n) est décroissante et majorée par 1 200
$\Rightarrow$ **On ne peut pas conclure**

Corrigé Exercice 15

n	Un
0	1
1	3,25
2	3,8125
3	3,953125
4	3,98828125
5	3,99707031

1) a. Initialisation : Pour $n = 0$, on a $v_0 = 2015$ et $v_1 \simeq 44{,}9$ Donc $0 \leq v_1 \leq v_0$.

La propriété est vraie au rang 0.

Hérédité : **Si la propriété est vraie au rang p**, on a $0 \leq v_{p+1} \leq v_p$ alors

$0 \leq \sqrt{v_{p+1}} \leq \sqrt{v_p}$ car la fonction racine carrée est croissante donc $0 \leq v_{p+2} \leq v_{p+1}$

Alors la propriété est vraie au rang $p+1$.

Conclusion : Pour tout entier naturel n, on a $\boldsymbol{0 \leq v_{n+1} \leq v_n}$.

b. La suite (v_n) est décroissante et minorée par 0, donc, d'après le théorème des suites monotones bornées, elle est **convergente**.

2) a. Initialisation : Pour $n = 0$, $w_0 = 5 \geq 0$. **La propriété est vraie au rang 0.**

Hérédité : **Si la propriété est vraie au rang p** alors $w_p \geq 0$.

Alors $-w_p \leq 0 \Rightarrow e^{-w_p} \leq 1$ car l'exponentielle est croissante $\Rightarrow -e^{-w_p} \geq -1$

$\Rightarrow 2 - e^{-w_p} \geq 1 \geq 0$ c'est-à-dire $w_{p+1} \geq 0$.

Alors la propriété est vraie au rang $p+1$.

Conclusion : Pour tout entier naturel n, on a $\boldsymbol{w_n \geq 0}$.

b. Initialisation : Pour $n = 0$, $w_1 = 2 - e^{-5} \simeq 2 \leq w_0$ **La propriété est vraie au rang 0.**

Hérédité : **Si la propriété est vraie au rang p** alors $w_{p+1} \leq w_p$.

donc $-w_{p+1} \geq -w_p \Rightarrow e^{-w_{p+1}} \geq e^{-w_p}$ car la fonction exponentielle est croissante.

Alors $-e^{-w_{p+1}} \leq -e^{-w_p} \Rightarrow 2 - e^{-w_{p+1}} \leq 2 - e^{-w_p}$.

Donc $w_{p+2} \leq w_{p+1}$ **La propriété est vraie au rang $p+1$.**

Conclusion : Pour tout entier naturel n, on a $\boldsymbol{w_{n+1} \leq w_n}$.

c. La suite (w_n) est donc décroissante et minorée par 0, d'après le théorème des suites monotones bornées, elle est donc **convergente**.

3) a. La suite (u_n) semble être **croissante.**

b. Initialisation : Pour $n = 0$, on a $u_0 = 1 \leq 4$ **La propriété est vraie au rang 0.**

Hérédité : **Si la propriété est vraie au rang p** alors $u_p \leq 4$

Alors $\frac{1}{4}u_p \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{4}u_p + 3 \leq 4$

Donc $u_{p+1} \leq 4$ **La propriété est vraie au rang $p+1$.**

Conclusion : Pour tout entier naturel n, on a $\boldsymbol{u_n \leq 4}$.

c. On a $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{4}u_n + 3 - u_n = -\frac{3}{4}u_n + 3$.

Or, comme $u_n \leq 4$, on en déduit $-\frac{3}{4}u_n \geq -3 \Rightarrow -\frac{3}{4}u_n + 3 \geq 0$.

Donc $\boldsymbol{u_{n+1} - u_n \geq 0}$ La suite (u_n) est bien **croissante**.

d. On a montré que la suite (u_n) était croissante et bornée par 4 : d'après le théorème des suites monotones bornées, la suite (u_n) est **convergente**.

Pour aller plus loin...

4) a. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$ par $f(x) = \frac{3x}{x+1}$.

f est dérivable, et on a $f'(x) = \frac{3(x+1)-3x}{(x+1)^2} = \frac{3}{(x+1)^2} \geq 0$ Donc la **fonction est croissante.**

b. <u>Initialisation</u> : Pour $n = 0$, $a_0 = 1$ et $a_1 = \frac{3}{2}$: on a bien $0 \leq a_0 \leq a_1 \leq 2$. **La propriété est vraie au rang 0.**

<u>Hérédité</u> : **Si la propriété est vraie au rang $\boldsymbol{p}$** alors $0 \leq a_p \leq a_{p+1} \leq 2$

<u>Alors</u> on a, puisque f est croissante : $f(0) \leq f(a_p) \leq f(a_{p+1}) \leq f(2)$ avec $f(0) = 0$ et $f(2) = \frac{6}{3} = 2$.

Donc en en déduit que $0 \leq a_{p+1} \leq a_{p+2} \leq 2$. **La propriété est vraie au rang $\boldsymbol{p+1}$.**

<u>Conclusion</u> : Pour tout entier naturel n, on $\boldsymbol{0 \leq a_n \leq a_{n+1} \leq 2}$.

c. On vient de démontrer que la fonction (a_n) est croissante et majorée par 2 : d'après le théorème des suites monotones et bornées, elle **converge**.

Corrigé Exercice 16

1) a. <u>Init</u> : Pour $n = 0$, $u_0 = 5\ et\ u_1 = \frac{1}{10}(5+1)^2 = \frac{36}{10} = 3{,}6$ Donc $0 \leq u_1 \leq u_0 \leq 5$.

La propriété est vraie au rang 0.

<u>HR</u> : **Si la propriété est vraie au rang $\boldsymbol{p}$** alors $0 \leq u_{p+1} \leq u_p \leq 5$

Alors on a $1 \leq u_{p+1} + 1 \leq u_p + 1 \leq 6$

Les nombres sont positifs et la fonction carrée croissante donc : $1 \leq (u_{p+1}+1)^2 \leq (u_p+1)^2 \leq 36$

$\Rightarrow \frac{1}{10} \leq \frac{1}{10}(u_{p+1}+1)^2 \leq \frac{1}{10}(u_p+1)^2 \leq \frac{36}{10}$ Or d'un côté $0 \leq \frac{1}{10}$ et de l'autre $\frac{36}{10} \leq 5$.

On a bien $0 \leq \frac{1}{10}(u_{p+1}+1)^2 \leq \frac{1}{10}(u_p+1)^2 \leq 5 \Rightarrow 0 \leq u_{p+2} \leq u_{p+1} \leq 5$.

La propriété est vraie au rang $\boldsymbol{p+1}$.

<u>Ccl</u> : Pour tout entier naturel n, on $\boldsymbol{0 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 5}$.

b. On vient de montrer que la suite (u_n) était décroissante et minorée par 0, d'après le théorème des suites monotones bornées, elle est **convergente vers un réel $\boldsymbol{l}$.**

c. On a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = l$ et $0 \leq u_{n+1}$ donc, d'après le théorème de comparaison, $0 \leq l$.

De même, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$ et $u_n \leq 5$ donc, $l \leq 5$ On a donc bien : $\boldsymbol{0 \leq l \leq 5}$

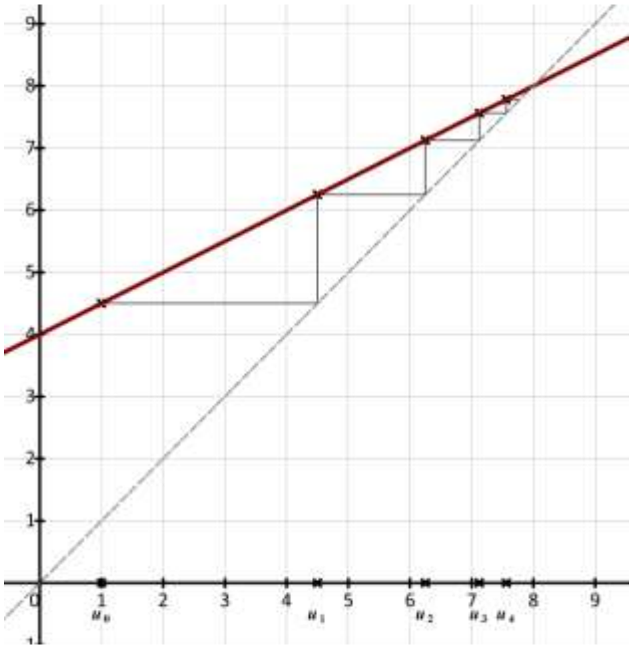
d. $l = \frac{1}{10}(l+1)^2 \Leftrightarrow 10l = l^2 + 2l + 1 \Leftrightarrow l^2 - 8l + 1 = 0$

$\Delta = 60 \Rightarrow l_1 = \frac{8+\sqrt{60}}{2} = 4 + \sqrt{15}\ et\ l_2 = 4 - \sqrt{15}$

On a $l_2 \in [0;5]$ alors que $l_1 > 5$.

Donc la solution qui convient est l_2 : $\boldsymbol{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 4 - \sqrt{15}}$

2) a. Ci-contre.



b. La suite a l'air croissante, elle est donc minorée par son premier terme $v_0 = 1$. Par ailleurs, il semblerait que les termes soient majorés par 8.

Donc on conjecture que $1 \leq v_n \leq v_{n+1} \leq 8$.

c. Démo par récurrence :

Init : Pour $n = 0$, $v_0 = 1$ *et* $v_1 = \frac{1}{2} + 4 = \frac{9}{2}$. Donc

$1 \leq v_0 \leq v_1 \leq 8$ **La propriété est vraie au rang 0.**

HR : **Si la propriété est vraie au rang p** alors

$1 \leq v_p \leq v_{p+1} \leq 8$

Alors $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}v_p \leq \frac{1}{2}v_{p+1} \leq 4$

$\Rightarrow \frac{9}{2} \leq \frac{1}{2}v_p + 4 \leq \frac{1}{2}v_{p+1} + 4 \leq 8$ Or $0 \leq \frac{9}{2}$.

On a bien : $1 \leq v_{p+1} \leq v_{p+2} \leq 8$.

La propriété est vraie au rang $p + 1$.

Ccl : Pour tout entier naturel n, on $\mathbf{1 \leq v_n \leq v_{n+1} \leq 8.}$

d. On a montré que (v_n) était une suite croissante et majorée par 8, d'après le théorème des suites monotones bornées, elle est donc convergente vers un réel l. Or, si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$, on a, par opération sur les limites : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{2}u_n + 4 = \frac{1}{2}l + 4$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = l$ on doit bien avoir $\boldsymbol{l = \frac{1}{2}l + 4.}$

e. $l = \frac{1}{2}l + 4 \Leftrightarrow \frac{1}{2}l = 4 \Leftrightarrow l = 8$ On a $\boldsymbol{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 8.}$

Pour aller plus loin…

3) *Modélisation de la situation par une suite :*

Appelons V_n le volume d'eau du lac artificiel au bout de n années, en milliers de m^3.
On a $v_0 = 80$ et d'une année sur l'autre, on garde 70% du volume d'eau de l'année précédente (soit $0{,}7V_n$) et on rajoute 6 milliers de m^3 d'eau. On a donc la relation de récurrence : $\boldsymbol{V_{n+1} = 0{,}7V_n + 6}$

Méthode : Pour comprendre l'évolution à long terme, il faut étudier la limite de la suite (V_n), donc chercher si elle est croissante ou décroissante, majorée ou minorée et donc convergente ou divergente.

Piste : À la calculatrice, conjecturer du sens de variation et des bornes de la suite :
La suite a l'air décroissante et minorée par 20.

n	Un
0	80
1	62
2	49,4
3	40,58
4	34,406
5	30,0842
6	27,05894
7	24,941258
8	23,4588806
9	22,4212164
10	21,6948515
11	21,186396
12	20,8304772
13	20,5813341
14	20,4069338
15	20,2848537

On va donc chercher à démontrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n, on a $20 \leq V$

Init : Pour $n = 0$, $V_0 = 80$ *et* $V_1 = 62$ on a bien $20 \leq V_0 \leq V_1$.

La propriété est vraie au rang 0.

HR : **Si la propriété est vraie au rang p** alors $20 \leq V_p \leq V_{p+1}$

Alors $14 \leq 0{,}7V_p \leq 0{,}7V_{p+1} \Rightarrow 20 \leq 0{,}7V_p + 6 \leq 0{,}7V_{p+1}$.

On a bien : $20 \leq V_{p+1} \leq V_{p+2}$. **La propriété est vraie au rang $p + 1$.**

Ccl : Pour tout entier naturel n, on $\mathbf{20 \leq V_n \leq V_{n+1}.}$

La suite (V_n) est donc décroissante et minorée par 20 : d'après le théorème des suites monotones bornées, **elle est convergente vers un réel L.**

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} V_{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} V_n = L$ on doit avoir $0{,}7L + 6 = L \Leftrightarrow 0{,}3L = 6 \Leftrightarrow L = 20$.
On a $\boldsymbol{\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = 20}$.

Corrigé Exercice 17

A – Première méthode

1) a. I : Pour $n = 0$, $u_0 = 12 \geq 8$ **vraie au rang 0**

HR : **Si la propriété est vraie au rang p** alors $u_p \geq 8$

Alors $\frac{3}{4}u_p \geq 6$
$\Rightarrow \frac{3}{4}u_p + 2 \geq 8 \Rightarrow u_{p+1} \geq 8$.
La propriété est vraie au rang $p+1$.

Ccl : Pour tout entier naturel n, on $\boldsymbol{u_n \geq 8}$.

b. I : Pour $n = 0$, $u_1 = \frac{3}{4} \times 12 + 2 = 11 \leq u_0$ **Vraie au rang 0**

HR : **Si la propriété est vraie au rang p** alors $u_{p+1} \leq u_p$

Alors $\frac{3}{4}u_{p+1} \leq \frac{3}{4}u_p$
$\Rightarrow \frac{3}{4}u_{p+1} + 2 \leq \frac{3}{4}u_p + 2 \Rightarrow u_{p+2} \leq u_{p+1}$.
La propriété est vraie au rang $p+1$.

Ccl : Pour tout entier naturel n, on a $\boldsymbol{u_{n+1} \leq u_n}$.

2) La suite (u_n) est décroissante et minorée par 8, d'après le théorème des suites monotones bornées, elle **converge vers une limite l.**

3) a. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$, on a, par opération sur les limites :
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{3}{4}u_n + 2 = \frac{3}{4}l + 2$.

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = l$ on doit bien avoir $\boldsymbol{l = \frac{3}{4}l + 2}$.

b. $l = \frac{3}{4}l + 2 \Leftrightarrow \frac{1}{4}l = 2 \Leftrightarrow l = 8 \Rightarrow$ On a $\boldsymbol{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 8}$.

B – Deuxième méthode

1) La suite (u_n) semble converger vers 8.

2) $v_n = u_n - 8$.

a. $v_{n+1} = u_{n+1} - 8 = \frac{3}{4}u_n - 6$

Et $\frac{3}{4}v_n = \frac{3}{4}(u_n - 8) = \frac{3}{4}u_n - 6$

Donc $v_{n+1} = \frac{3}{4}v_n$.

(v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{3}{4}$ et de 1er terme $v_0 = u_0 - 8 = 4$

b. $\boldsymbol{v_n} = v_0 \times q^n = \boldsymbol{4 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n}$ et
$\boldsymbol{u_n} = v_n + 8 = \boldsymbol{8 + 4 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n}$

c. On a $-1 < \frac{3}{4} < 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n = 0$

Donc, par opération sur les limites :
$\boldsymbol{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 8}$ **.**

Les sujets de bacs peuvent vous mener vers les deux méthodes, mais si vous avez à faire toute la démarche seuls (type question ouverte), il faut connaître les étapes.