Savoir Si. 2 : Minoration, majoration de suites

Entraînement 1

1) Soit (a_n) la suite définie par $a_{n+1} = f(a_n)$ et $a_0 = 6$ où f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 1{,}4x - 0{,}05x^2$$

a. Étudier les variations de f sur $[0; 8]$

b. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a $0 \leq u_n \leq 8$

2) (b_n) définie par $b_0 = 2$ et $b_{n+1} = \frac{b_n}{2} - 3$

Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $-6 \leq b_n \leq 2$

Entraînement 2

1) (v_n) définie par $v_0 = 2$ et $v_{n+1} = \frac{2}{3}v_n + \frac{1}{3}n + 1$

Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $v_n \leq n + 3$

2) Soit (a_n) la suite définie par $a_{n+1} = a_n \times e^{a_n}$ et $a_0 = \frac{1}{2}$.

a. Étudier le sens de variation de la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ telle que $a_{n+1} = f(a_n)$

b. En déduire que, pour tout entier naturel n, on a0 $\leq a_n \leq \frac{1}{2}$

Entraînement 3

1) (u_n) définie par $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = 2 + \frac{1}{u_n}$. On admet que, pour tout entier naturel n, on a $u_n > 0$

Démontrer que, pour tout entier naturel n, $2 \leq u_n \leq 3$

2) Soit g la fonction définie sur $[0; 2]$ par $g(x) = \frac{2x+1}{x+1}$

a. Déterminer le sens de variation de g sur $[0; 2]$

b. Soit (w_n) la suite définie par $w_0 = 1$ et $w_{n+1} = g(w_n)$. Démontrer que, pour tout n, on a $1 \leq w_n \leq 2$

Entraînement 4

1) Soit (x_n) la suite définie par $x_{n+1} = x_n^2 - 2x_n + 2$ et $x_0 = \frac{3}{2}$.

a. Étudier le sens de variation de la fonction f définie sur $[1; +\infty[$ telle que $x_{n+1} = f(x_n)$

b. En déduire que, pour tout entier naturel n, on a $1 \leq x_n \leq 2$

2) (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 3}$.

Démontrer que, pour tout entier naturel n, $0 < u_n \leq 3$

Entraînement 5

1) Soit (w_n) la suite définie par $w_{n+1} = \sqrt{2w_n + 3}$ et $w_0 = 0$

a. Étudier les variations de la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par : $f(x) = \sqrt{2x + 3}$

b. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a $0 \leq w_n \leq 3$

2) (u_n) définie par $u_0 = 3$ et pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n - 1$.

Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boldsymbol{u_n \geq -3}$

Corrections Savoir Si. 2

Corrigé Entraînement 1

x	$-\infty$ 14 $+\infty$
$f'(x)$	$+$ 0 $-$
$f(x)$	$\nearrow$ $\searrow$

1) a. On a $f'(x) = 1{,}4 - 0{,}1x$

Donc f est croissante sur $[0; 8]$

b. Initialisation : Pour $n = 0$ on a : $a_n = a_0 = 6$
donc $\boldsymbol{0 \leq a_n \leq 8}$ **est vrai pour $\boldsymbol{n = 0}$**

Hérédité : **Si $\boldsymbol{0 \leq a_n \leq 8}$ est vrai pour $\boldsymbol{n = p}$**, on a : $0 \leq a_p \leq 8$
Or la fonction f est croissante sur $[0; 8]$ donc $f(0) \leq f(a_p) \leq f(8)$
Or $f(0) = 0$ et $f(8) = 8$ donc $0 \leq a_{p+1} \leq 8$
Alors $\boldsymbol{0 \leq a_n \leq 8}$ est vrai pour $\boldsymbol{n = p + 1}$

Conclusion : Pour tout entier naturel n, on a : $\boldsymbol{0 \leq a_n \leq 8}$

2) Initialisation : Pour $n = 0$ on a : $b_n = b_0 = 2$ donc $\boldsymbol{-6 \leq b_n \leq 2}$ **est vraie est vrai pour $\boldsymbol{n = 0}$**

Hérédité : **Si $\boldsymbol{-6 \leq b_n \leq 2}$ est vrai pour $\boldsymbol{n = p}$**, alors on a : $-6 \leq b_p \leq 2$
$\Rightarrow -3 \leq \frac{1}{2}b_p \leq 1 \quad \Rightarrow \quad -6 \leq \frac{1}{2}b_p - 3 \leq -2 \leq 2$ alors on a : $-6 \leq \frac{1}{2}b_p - 3 \leq 2$
$\Rightarrow -6 \leq b_{p+1} \leq 2$ **Alors $\boldsymbol{-6 \leq b_n \leq 2}$ est vrai pour $\boldsymbol{n = p + 1}$**

Conclusion : Pour tout entier naturel n, on a : $\boldsymbol{-6 \leq b_n \leq 2}$

Corrigé Entraînement 2

1) Initialisation : Pour $n = 0$ on a : $v_n = v_0 = 2$ et $n + 3 = 3$ donc $\boldsymbol{v_n \leq n + 3}$ **est vraie pour $\boldsymbol{n = 0}$**

Hérédité : Si **$\boldsymbol{v_n \leq n + 3}$ est vraie pour $\boldsymbol{n = p}$**, alors on a $\boldsymbol{v_p \leq p + 3}$
Alors pour $n = p + 1$, on a $v_n = v_{p+1} = \frac{2}{3}v_p + \frac{1}{3}p + 1$ et $n + 3 = p + 4$.
Or $v_p \leq p + 3 \Rightarrow \frac{2}{3}v_p \leq \frac{2}{3}(p + 3) \;\Rightarrow\; \frac{2}{3}v_p + \frac{1}{3}p \leq \frac{2}{3}(p + 3) + \frac{1}{3}p \;\Rightarrow\; \frac{2}{3}v_p + \frac{1}{3}p + 1 \leq \frac{2}{3}(p + 3) + \frac{1}{3}p + 1$
$\Rightarrow v_{p+1} \leq \frac{2}{3}p + 1 + \frac{1}{3}p + 1 \;\Rightarrow\; v_{p+1} \leq p + 2$ et par élargissement de l'inégalité $v_{p+1} \leq p + 2 + 2$
$\Rightarrow \boldsymbol{v_{p+1} \leq (p + 1) + 3}$ **Alors $\boldsymbol{v_n \leq n + 3}$ est vrai pour $\boldsymbol{n = p + 1}$**

Conclusion : Pour tout entier naturel n, on a : $v_n \leq n + 3$

x	0 1 $+\infty$
$f'(x)$	$+$ 0 $-$
$f(x)$	$\nearrow$ $\searrow$

2) **a.** Soit $f(x) = xe^{-x}$
On a $f'(x) = e^{-x} + x(-e^{-x}) = (1 - x)e^{-x}$
f' est du signe de $1 - x$ (car l'exponentielle est toujours positive)

b. Initialisation : Pour $n = 0$ on a $a_0 = \frac{1}{2}$ donc $0 \leq a_0 \leq \frac{1}{2}$ **est vraie pour $\boldsymbol{n = 0}$**

Hérédité : Si $0 \leq a_n \leq \frac{1}{2}$ est vraie pour $n = p$, on a $0 \leq a_p \leq \frac{1}{2}$
Or la fonction f est croissante sur $\left[0; \frac{1}{2}\right]$ donc $f(0) \leq f(a_p) \leq f\left(\frac{1}{2}\right)$
Avec $f(0) = 0$ et $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{e^{-0,5}}{2} \simeq 0{,}3$ on en déduit que $0 \leq u_{p+1} \leq \frac{e^{-0,5}}{2}$
et par élargissement : $0 \leq a_{p+1} \leq \frac{1}{2}$. **Alors $\boldsymbol{0 \leq a_n \leq \frac{1}{2}}$ est vraie pour $\boldsymbol{n = p + 1}$**

Conclusion : Pour tout entier naturel n, on a : $\boldsymbol{0 \leq a_n \leq \frac{1}{2}}$

Corrigé Entraînement 3

1) Initialisation : pour $n = 0$ on a $u_0 = 3$ donc $2 \leq u_0 \leq 3$ donc $\boldsymbol{2 \leq u_n \leq 3}$ **est vraie pour** $\boldsymbol{n = 0}$

Hérédité : S $\boldsymbol{2 \leq u_n \leq 3}$ i **est vraie pour** $\boldsymbol{n = p}$**, alors on a** $2 \leq u_p \leq 3$

donc $\frac{1}{2} \geq \frac{1}{u_p} \geq \frac{1}{3}$ et $\frac{7}{3} \leq \frac{1}{u_p} + 2 \leq \frac{5}{2}$

Or on a $2 \leq \frac{7}{3}$ et $\frac{5}{2} \leq 3$ D'où par élargissement $2 \leq \frac{1}{u_p} + 2 \leq 3 \Leftrightarrow 2 \leq u_{p+1} \leq 3$

Alors $\boldsymbol{2 \leq u_n \leq 3}$ **est vraie pour** $\boldsymbol{n = p + 1}$

Conclusion : Pour tout entier naturel n, on a : $\boldsymbol{2 \leq u_n \leq 3}$

2) a. On a $g'(x) = \frac{2(x+1)-(2x+1)}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2} > 0$

Donc g est croissante sur $[0; 2]$

x	0 $\quad$ 2
$g'(x)$	$+$
$g(x)$	$\nearrow$

b. Initialisation : Pour $n = 0$ on a $w_0 = 1$ donc $1 \leq w_n \leq 2$ **est vraie pour** $\boldsymbol{n = 0}$

Hérédité : Si $1 \leq w_n \leq 2$ est vraie pour $n = p$, on a : $1 \leq w_p \leq 2$

Or la fonction g est croissante sur $[1; 2]$ donc $g(1) \leq g(w_p) \leq g(2)$

Avec $g(1) = \frac{3}{2}$ et $g(2) = \frac{5}{3}$ on en déduit que $\frac{3}{2} \leq w_{p+1} \leq \frac{5}{3}$

et par élargissement : $1 \leq w_{p+1} \leq 2$. **Donc** $\boldsymbol{1 \leq w_n \leq 2}$ **est vraie pour** $\boldsymbol{n = p + 1}$

Conclusion : Pour tout entier naturel n, on a : $\boldsymbol{1 \leq w_n \leq 2}$

Corrigé Entraînement 4

1) a. Soit $f(x) = x^2 - 2x + 2$

On a $f'(x) = 2x - 2$

Donc f est croissante sur $[1; +\infty]$

x	$-\infty$ $\quad$ 1 $\quad$ $+\infty$
$f'(x)$	$-$ $\quad$ 0 $\quad$ $+$
$f(x)$	$\searrow$ $\quad$ $\nearrow$

b. Initialisation : Pour $n = 0$ on a $x_0 = \frac{3}{2}$ donc $1 \leq x_n \leq 2$ **est vraie pour** $\boldsymbol{n = 0}$

Hérédité : Si $1 \leq x_n \leq 2$ est vraie pour $n = p$ alors on a $1 \leq x_p \leq 2$

Or la fonction f est croissante sur $[1\,; 2]$ donc $f(1) \leq f(x_p) \leq f(2)$

Avec $f(1) = 1$ et $f(2) = 2$ on en déduit que $0 \leq x_{p+1} \leq 2$

Donc $\boldsymbol{1 \leq x_n \leq 2}$ **est vraie pour** $\boldsymbol{n = p + 1}$

Conclusion : Pour tout entier naturel n, on a : $\boldsymbol{1 \leq x_n \leq 2}$

2) Initialisation : pour $n = 0$ on a : $0 < 1 \leq 3$ donc $0 \leq u_n \leq 3$ **est vraie pour** $\boldsymbol{n = 0}$

Hérédité : **Si** $\boldsymbol{0 < u_n \leq 3}$ **est vraie pour** $\boldsymbol{n = p}$**,** alors on a $0 < u_p \leq 3$

donc $3 < 2u_p + 3 \leq 9$ et $\sqrt{3} < \sqrt{2u_n + 3} \leq 3$ car la fonction racine est croissante

Or on a $0 < \sqrt{3}$ D'où par élargissement $0 < \sqrt{2u_n + 3} \leq 3 \Leftrightarrow$ $\boldsymbol{0 < u_{p+1} \leq 3}$

Donc $\boldsymbol{0 < u_n \leq 3}$ **est vraie pour** $\boldsymbol{n = p + 1}$

Conclusion : Pour tout entier naturel n, on a : $\boldsymbol{0 < u_n \leq 3}$

Corrigé Entraînement 5

1) a. On a $f'(x) = \frac{2}{2\sqrt{2x+3}} = \frac{1}{\sqrt{2x+3}} > 0$

Donc f est croissante sur $[0; +\infty[$

x	0 $\quad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$\nearrow$

b. Initialisation : Pour $n = 0$ on a $w_0 = 0$ donc $0 \leq w_n \leq 3$ **est vraie pour $\boldsymbol{n = 0}$**

Hérédité : **Si $\boldsymbol{0 < w_n \leq 3}$ est vraie pour $\boldsymbol{n = p}$,** alors on a : $0 \leq w_p \leq 3$

Or la fonction f est croissante sur $[0; 3]$ donc $f(0) \leq f(w_p) \leq f(3)$

Avec $f(0) = \sqrt{3}$ et $f(3) = 3$ on en déduit que $\sqrt{3} \leq w_{p+1} \leq 3$

et par élargissement : $0 \leq w_{p+1} \leq 3$. **Donc $\boldsymbol{0 < w_n \leq 3}$ est vraie pour $\boldsymbol{n = p + 1}$**

Conclusion : Pour tout entier naturel n, on a : $\boldsymbol{0 \leq w_n \leq 3}$

2) Initialisation : pour $n = 0$ on a : $u_0 = 3 \geq -3$ donc $u_n \geq -3$ **est vraie pour $\boldsymbol{n = 0}$**

Hérédité : **Si** $u_n \geq -3$ **est vraie pour $\boldsymbol{n = p}$,** alors on a $u_p \geq -3$ donc $\frac{2}{3}u_p \geq -2 \Rightarrow \frac{2}{3}u_p - 1 \geq -3$

Donc $\boldsymbol{u_{p+1} \geq -3}$ Donc $\boldsymbol{u_n \geq -3}$ est vraie pour $\boldsymbol{n = p + 1}$

Conclusion : Pour tout entier naturel n, on a : $\boldsymbol{u_n \geq -3}$