Savoir Fle. 4 : Équations

Entraînement 1

Résoudre les équations suivantes sur l'ensemble de définition donné

1) a) $\ln(3-2x) = 2$ sur $D = \left]-\infty; \frac{3}{2}\right[$ **b)** $2 - 3e^x = -4$ sur $\mathbb{R}$ **c)** $2\ln x - 1 = -4$ pour $x > 0$

2) a) $3 - 2\ln(1+4x) = 5$ pour $x > -\frac{1}{4}$ **b)** $\ln(2-x) = \ln(1+x)$ sur $D =]-\mathbf{1}; \mathbf{2}[$ **c)** $e^{2-x} = \frac{1}{e^{2x-x^2}}$ sur $\mathbb{R}$

3) $(x-1)\ln(3+x) = 0$ sur $D =]-3; +\infty[$

Entraînement 2

Résoudre les équations suivantes sur l'ensemble de définition donné

1) a) $-2\ln x + 7 = 1$ pour $x > 0$ **b)** $1 + e^{3-2x} = 3$ sur $\mathbb{R}$ **c)** $\ln(x^2+1) = -2$ sur $\mathbb{R}$

2) a) $\ln(1+2x) = \ln(x-1)$ sur $D =]1;\ +\infty[$ **b)** $e^{2x+1} = e^{1-x}$ sur $\mathbb{R}$ **c)** $e \times e^{4-x} = 1$ sur $\mathbb{R}$

3) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $4 - e^{2x} = 3e^x$

Entraînement 3

Résoudre les équations suivantes sur l'ensemble de définition donné

1) a) $2 - 3\ln x = 11$ sur $]0; +\infty[$ **b)** $e^{1-2x} = 3$ sur $\mathbb{R}$ **c)** $\ln(4-2x) = -1$ pour $x < 2$

2) a) $\ln(4+2x) = \ln 2$ pour $x \in]-2; +\infty[$ **b)** $\ln(x^2) - \ln(3x) = 0$ pour tout réel $x > 0$ **c)** $e^{1+x} = \frac{1}{e^{2-x}}$ sur $\mathbb{R}$

3) $\ln^2 x - (e+1)\ln x + e = 0$ pour $x > 0$

Entraînement 4

Résoudre les équations suivantes sur l'ensemble de définition donné

1) a) $3\ln(2x-6) = 9$ sur $D =]3\,; +\infty[$ **b)** $10e^{-\frac{x}{2}} = 2$ sur $\mathbb{R}$ **c)** $e^{1-x} + 2 = 0$ pour $x \in \mathbb{R}$

2) a) $\ln(x-3) = \ln 5$ pour tout réel $x > 3$ **b)** $e^{4-5x} = e^{2+x}$ sur $\mathbb{R}$ **c)** $e - e^{x^2-3} = 0$ sur $\mathbb{R}$

3) $\begin{cases} 2\ln x - \ln y = -4 \\ \ln x + 3\ln y = 5 \end{cases}$ pour x et y deux réels strictement positifs

Entraînement 5

Résoudre les équations suivantes sur l'ensemble de définition donné

1) a) $4 - e^{2x-1} = 2$ sur $\mathbb{R}$ **b)** $2\ln x - 6 = -\ln x$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ **c)** $e^{-x} = \sqrt{5}$ pour tout réel x

2) a) $\ln(x^2) = \ln 9$ pour tout $x \neq 0$ **b)** $e^{x^2-1} = e^{2+2x}$ sur $\mathbb{R}$ **c)** $\ln(x) - 1 = \ln(x+2)$ pour $x \in]0;+\infty[$

3) $(e^x - 3)(4 + \ln x) = 0$ pour tout réel $x > 0$

Corrections Savoir Fle.4

Corrigé Entraînement 1

1) a) $\ln(3-2x)=2$
$\Leftrightarrow\ 3-2x=e^2$
$\Leftrightarrow\ x=\frac{3-e^2}{2}\ \Rightarrow\ \boldsymbol{S=\left\{\frac{3-e^2}{2}\right\}}$

b) $2-3e^x=-4$
$\Leftrightarrow\ -3e^x=-6$
$\Leftrightarrow\ e^x=2$
$\Leftrightarrow\ x=\ln 2\ \Rightarrow\ \boldsymbol{S=\{\ln 2\}}$

c) $2\ln x-1=-4$
$\Leftrightarrow\ \ln x=-\frac{3}{2}$
$\Leftrightarrow\ x=e^{-\frac{3}{2}}\ \Rightarrow\ \boldsymbol{S=\left\{e^{-\frac{3}{2}}\right\}}$

2) a) $3-2\ln(1+4x)=5\ \Leftrightarrow\ \ln(1+4x)=-1\ \Leftrightarrow\ 1+4x=\frac{1}{e}\ \Leftrightarrow\ x=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{e}-1\right)\ \Rightarrow\ \boldsymbol{S=\left\{\frac{1-e}{4e}\right\}}$

b) $\ln(2-x)=\ln(1+x)\ \Leftrightarrow\ 2-x=1+x\ \Leftrightarrow\ 2x=1\ \Leftrightarrow\ x=\frac{1}{2}\ \Rightarrow\ \boldsymbol{S=\left\{\frac{1}{2}\right\}}$

c) $e^{2-x}=\frac{1}{e^{2x-x^2}}\ \Leftrightarrow\ e^{2-x}=e^{-2x+x^2}\ \Leftrightarrow\ 2-x=-2x+x^2\ \Leftrightarrow\ x^2-x-2=0$
$\Delta=9\,;x_1=2\ \ et\ \ x_2=-1\ \Rightarrow\ \boldsymbol{S=\{-1;2\}}$

3) Un produit est nul si un des facteurs est nul
$(x-1)\ln(3+x)=0\ \Leftrightarrow\ x-1=0\ \ ou\ \ \ln(3+x)=0\ \Leftrightarrow\ x=1\ \ ou\ \ 3+x=1\ \Rightarrow\ \boldsymbol{S=\{1;2\}}$

Corrigé Entraînement 2

1) a) $-2\ln x+7=1$
$\Leftrightarrow\ \ln x=\frac{1-7}{-2}=3$
$\Leftrightarrow\ x=e^3\ \Rightarrow\ \boldsymbol{S=\{e^3\}}$

b) $1+e^{3-2x}=3$
$\Leftrightarrow\ e^{3-2x}=2$
$\Leftrightarrow\ 3-2x=\ln 2$
$\Leftrightarrow\ -2x=\ln 2-3$
$\Leftrightarrow\ x=\frac{3-\ln 2}{2}\ \Rightarrow\ \boldsymbol{S=\left\{\frac{3-\ln 2}{2}\right\}}$

c) $\ln(x^2+1)=-2$
$\Leftrightarrow\ x^2+1=e^{-2}$
$\Leftrightarrow\ x^2=e^{-2}-1$
Mais $e^{-2}-1<0$ et un carré doit toujours être positif
Donc $\boldsymbol{S=\emptyset}$

2) a) $\ln(1+2x)=\ln(x-1)\ \Leftrightarrow 1+2x=x-1\ \Leftrightarrow\ x=-2$ Mais ce nombre n'appartient pas à l'ensemble de définition : il n'y a **donc pas de solution possible** *(vous pouvez vérifier graphiquement : les courbes des fonctions $x\to \ln\,(1+2x)$ et $x\to \ln\,(x-1)$ ne se croisent pas)*
Donc $\boldsymbol{S=\emptyset}$

b) $e^{2x+1}=e^{1-x}\ \Leftrightarrow\ 2x+1=1-x\ \Leftrightarrow\ 3x=0\ \Rightarrow\ \boldsymbol{S=\{0\}}$

c) $e\times e^{4-x}=1\ \Leftrightarrow\ e^{5-x}=e^0\ \Leftrightarrow\ 5-x=0\ \Leftrightarrow\ x=5\ \Rightarrow\ \boldsymbol{S=\{5\}}$

3) $4-e^{2x}=3e^x\ \Leftrightarrow\ e^{2x}+3e^x-4=0$
En posant comme changement de variable $Y=e^x$ l'équation revient à résoudre : $Y^2+3Y-4=0$

$\Delta=25\,;Y_1=1\ \ et\ \ Y_2=-4\ \Rightarrow$ on cherche donc $\begin{cases}Y_1=e^{x_1}=1\ \Leftrightarrow\ x_1=0\\ Y_2=e^{x_2}=-4\ \Rightarrow\ pas\ de\ solution\end{cases}$

Donc $\boldsymbol{S=\{0\}}$

Corrigé Entraînement 3

1) a) $2 - 3\ln x = 11 \Leftrightarrow \ln x = \frac{11-2}{-3} = -3 \Leftrightarrow x = e^{-3} \Rightarrow \boldsymbol{S = \{e^{-3}\}}$

b) $e^{1-2x} = 3 \Leftrightarrow 1 - 2x = \ln 3 \Leftrightarrow -2x = \ln 3 - 1 \Leftrightarrow x = \frac{1-\ln 3}{2} \Rightarrow \boldsymbol{S = \left\{\frac{1-\ln 3}{2}\right\}}$

c) $\ln(4 - 2x) = -1 \Leftrightarrow 4 - 2x = e^{-1} \Leftrightarrow 2x = 4 - \frac{1}{e} \Leftrightarrow x = 2 - \frac{1}{2e} \Rightarrow \boldsymbol{S = \left\{2 - \frac{1}{2e}\right\}}$

2) a) $\ln(4 + 2x) = \ln 2 \Leftrightarrow 4 + 2x = 2 \Leftrightarrow x = -1 \Rightarrow \boldsymbol{S = \{-1\}}$

b) $\ln(x^2) - \ln(3x) = 0 \Leftrightarrow \ln(x^2) = \ln(3x) \Leftrightarrow x^2 = 3x \Leftrightarrow x^2 - 3x = 0 \Leftrightarrow x(x-3) = 0$
$\Leftrightarrow x = 0 \ ou \ x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \ ou \ x = 3$
la solution $x = 0$ ne convient pas à l'ensemble de définition donc $\boldsymbol{S = \{3\}}$

c) $e^{1+x} = \frac{1}{e^{2-x}} \Leftrightarrow e^{1+x} = e^{-2+x} \Leftrightarrow 1 + x = -2 + x \Leftrightarrow 1 = -2 \Rightarrow \boldsymbol{S = \emptyset}$

3) Changement de variable $Y = \ln x$ et $Y^2 - (e+1)Y + e = 0$
$\Rightarrow \Delta = (e+1)^2 - 4e = e^2 - 2e + 1 = (e-1)^2$; $x_1 = \frac{e+1+e-1}{2} = \frac{2e}{2} = e$ et $x_2 = \frac{e+1-e+1}{2} = \frac{2}{2} = 1$
$\boldsymbol{S = \{1; e\}}$

Corrigé Entraînement 4

1) a) $3\ln(2x - 6) = 9 \Leftrightarrow \ln(2x - 6) = 3 \Leftrightarrow 2x - 6 = e^3 \Rightarrow \boldsymbol{S = \left\{3 + \frac{1}{2}e^3\right\}}$

b) $10\, e^{-\frac{x}{2}} = 2 \Leftrightarrow e^{-\frac{x}{2}} = \frac{1}{5} \Leftrightarrow -\frac{x}{2} = -\ln 5 \Leftrightarrow x = 2\ln 5 \Rightarrow \boldsymbol{S = \{2\ln 5\}}$

c) $e^{1-x} + 2 = 0 \Leftrightarrow e^{1-x} = -2$ Or une exponentielle est toujours positive $\Rightarrow \boldsymbol{S = \emptyset}$

2) a) $\ln(x - 3) = \ln 5 \Leftrightarrow x - 3 = 5 \Leftrightarrow x = 8 \Rightarrow \boldsymbol{S = \{8\}}$

b) $e^{4-5x} = e^{2+x} \Leftrightarrow 4 - 5x = 2 + x \Leftrightarrow 2 = 6x \Rightarrow \boldsymbol{S = \left\{\frac{1}{3}\right\}}$

c) $e - e^{x^2-3} = 0 \Leftrightarrow e = e^{x^2-3} \Leftrightarrow 1 = x^2 - 3 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Rightarrow \boldsymbol{S = \{-2; 2\}}$

3) $\begin{cases} 2\ln x - \ln y = -4 \\ \ln x + 3\ln y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln y = 2\ln x + 4 \\ \ln x + 3(2\ln x + 4) = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln y = 2\ln x + 4 \\ 7\ln x = -7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln y = 2(-1) + 4 \\ \ln x = -1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \ln y = 2 \\ \ln x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \boldsymbol{y = e^2} \\ \boldsymbol{x = e^{-1}} \end{cases}$ donc $\boldsymbol{S = \left\{\left(e^2; \frac{1}{e}\right)\right\}}$

Corrigé Entraînement 5

1) a) $4 - e^{2x-1} = 2$
$\Leftrightarrow e^{2x-1} = 2$
$\Leftrightarrow 2x - 1 = \ln 2$
$\Leftrightarrow \ x = \frac{\ln 2 + 1}{2} \ \Rightarrow \ \boldsymbol{S = \left\{\frac{1 + \ln 2}{2}\right\}}$

b) $2\ln x - 6 = -\ln x$
$\Leftrightarrow \ 3\ln x = 6$
$\Leftrightarrow \ \ln x = 2$
$\Leftrightarrow \ x = e^2 \ \Rightarrow \ \boldsymbol{S = \{e^2\}}$

c) $e^{-x} = \sqrt{5} \ \Leftrightarrow \ -x = \ln(\sqrt{5})$
$\Leftrightarrow \ x = -\ln\left(5^{\frac{1}{2}}\right)$
$\Leftrightarrow \ x = -\frac{1}{2}\ln 5 \Rightarrow \boldsymbol{S = \left\{-\frac{1}{2}\ln 5\right\}}$

2) a) $\ln(x^2) = \ln 9 \ \Leftrightarrow \ x^2 = 9 \ \Leftrightarrow \ x = -\sqrt{9} \ ou \ x = \sqrt{9} \ \Rightarrow \ \boldsymbol{S = \{-3; 3\}}$

b) $e^{x^2-1} = e^{2+2x} \ \Leftrightarrow \ x^2 - 1 = 2 + 2x \ \Leftrightarrow \ x^2 - 2x - 3 = 0$ avec $\Delta = 16$, $x_1 = 3 \ et \ x_2 = -1$
$\Rightarrow \ \boldsymbol{S = \{-1; 3\}}$

c) $\ln(x) - 1 = \ln(x + 2) \ \Leftrightarrow \ \ln x - \ln e = \ln(x + 2) \Leftrightarrow \ \ln\left(\frac{x}{e}\right) = \ln(x + 2) \ \Leftrightarrow \ \frac{x}{e} = x + 2$
$\Leftrightarrow \ x\left(\frac{1}{e} - 1\right) = 2 \Leftrightarrow \ x = \frac{2}{\frac{1}{e} - 1} = \frac{2e}{1 - e} \ \Rightarrow \boldsymbol{S = \left\{\frac{2e}{1 - e}\right\}}$

3) Un produit est nul ssi un des facteurs est nul : Soit $e^x - 3 = 0 \ \Leftrightarrow \ e^x = 3 \ \Leftrightarrow \ x = \ln 3$
Soit $4 + \ln x = 0 \ \Leftrightarrow \ \ln x = -4 \ \Leftrightarrow \ x = e^{-4}$

Donc $\boldsymbol{S = \{e^{-4}; \ln 3\}}$