Correction Objectif bac

Corrigé Sujet A

1) a. $u_1 = 0{,}8$, $u_2 \simeq 1{,}08$, $u_3 \simeq 0{,}98$ et $u_4 \simeq 1{,}01$.

b. $u_1 - 1 = -0{,}2$ du signe de $(-1)^1 = -1$; $u_2 - 1 \simeq 0{,}08$ du signe de $(-1)^2 = 1$;
$u_3 - 1 \simeq -0{,}02$ du signe de $(-1)^3 = -1$ et $u_4 - 1 \simeq 0{,}01$ du signe de $(-1)^4 = 1$

2) a. $u_{n+1} - 1 = \frac{u_n+2}{2u_n+1} - 1 = \frac{u_n+2-(2u_n+1)}{2u_n+1} = \frac{u_n+2-2u_n-1}{2u_n+1} = \frac{-u_n+1}{2u_n+1}$

b. *Init.* : Pour $n = 0$, on a $u_0 - 1 = 1$ positif et $(-1)^0 = 1$ positif. La propriété est vraie au rang 0

Hérédité : Si pour $n = p$ la propriété est vraie, on a : $u_p - 1$ du même signe que $(-1)^p$

Pour $n = p+1$, $u_n - 1 = u_{p+1} - 1 = \frac{-u_p+1}{2u_p+1}$ or, on a admis que u_p est positif donc $2u_p + 1$ aussi.

Donc u_{p+1} est du même signe que $-u_p + 1 = -(u_p - 1)$ c'est-à-dire du signe opposé à $u_p - 1$, qui, d'après l'hypothèse de récurrence, est du signe de $(-1)^p$

on a donc u_{p+1} du même signe que $-(-1)^p = (-1)^{p+1}$ et $(-1)^n = (-1)^{p+1}$.

La propriété est vérifiée au rang $n = p+1$.

Ccl **: Pour tout nombre entier $n \geq$, on a bien $u_n - 1$ du même signe que $(-1)^n$**

3) *a.* $v_{n+1} = \dfrac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}+1} = \dfrac{\frac{-u_n+1}{2u_n+1}}{\frac{u_n+2}{2u_n+1}+1} = \dfrac{\frac{-u_n+1}{2u_n+1}}{\frac{3u_n+3}{2u_n+1}} = \dfrac{-u_n+1}{3u_n+3}$

b. $v_{n+1} = \frac{-u_n+1}{3u_n+3} = -\frac{1}{3}\frac{u_n-1}{u_n+1} = -\frac{1}{3}\boldsymbol{v_n}$ la suite (v_n) est bien une suite géométrique de raison $-\frac{1}{3}$

On a $v_0 = \frac{u_0-1}{u_0+1} = \frac{1}{3}$ donc $\boldsymbol{v_n = \frac{1}{3} \times \left(-\frac{1}{3}\right)^n}$

c. $u_n = \dfrac{1+v_n}{1-v_n} = \dfrac{\mathbf{1+\frac{1}{3}\times\left(-\frac{1}{3}\right)^n}}{\mathbf{1-\frac{1}{3}\times\left(-\frac{1}{3}\right)^n}}$ on peut éventuellement chercher à simplifier l'expression :

avec $1 + \frac{1}{3} \times \left(-\frac{1}{3}\right)^n = 1 + \frac{(-1)^n}{3^{n+1}} = \frac{3^{n+1}+(-1)^n}{3^{n+1}}$ et $1 - \frac{1}{3} \times \left(-\frac{1}{3}\right)^n = 1 - \frac{(-1)^n}{3^{n+1}} = \frac{3^{n+1}-(-1)^n}{3^{n+1}}$

On simplifie $u_n = \frac{3^{n+1}+(-1)^n}{3^{n+1}-(-1)^n}$ mais ce n'est pas forcément mieux ☺

Corrigé Sujet B

1. $d_1 = \frac{1}{2}d_0 + 100 = \mathbf{250}$ et $a_1 = \frac{1}{2}d_0 + \frac{1}{2}a_0 + 70 = \mathbf{445}$

2. a. L'algorithme affiche bien $D = 250$

Mais pour A, il fait le calcul avec D=250 et non D=300 : soit $A = \frac{450}{2} + \frac{250}{2} + 70 = 420$

b. Il suffit d'inverser l'ordre des deux calculs ; en calculant A d'abord, puis D

3. a. $\boldsymbol{e_{n+1}} = d_{n+1} - 200 = \left(\frac{1}{2}d_n + 100\right) - 200 = \frac{1}{2}(e_n + 200) - 100 = \frac{1}{2e_n} + 100 - 100 = \boldsymbol{\frac{1}{2}e_n}$

la suite (e_n) est bien géométrique, de raison $\frac{1}{2}$.

b. On a $e_0 = d_0 - 200 = 100$ donc $e_n = 100 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$ Et donc $d_n = e_n + 200 = 200 + 100 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$