Exercice 1.

On munit le plan complexe d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

1. On considère l'équation $(E) : z^2 - 6z + c = 0$ où c est un réel strictement supérieur à 9.

a. Justifier que (E) admet deux solutions complexes non réelles.

b. Justifier que les solutions de (E) sont $z_A = 3 + i\sqrt{c-9}$ et $z_B = 3 - i\sqrt{c-9}$

Exercice 2.

On considère les nombres complexes z_n définis pour tout entier $n \geq 0$ par la donnée de z_0, où z_0 est différent de 0 et de 1, et la relation de récurrence : $z_{n+1} = 1 - \frac{1}{z_n}$

1. a. Dans cette question, on suppose que $z_0 = 2$. Déterminer les nombres z_1 , z_2 , z_3 , z_4 , z_5 et z_6.

b. Dans cette question, on suppose que $z_0 = i$. Déterminer la forme algébrique des nombres complexes z_1 , z_2 , z_3 , z_4 , z_5 et z_6.

c. Dans cette question on revient au cas général où z_0 est un complexe donné.
Que peut-on conjecturer pour les valeurs prises par z_{3n} selon les valeurs de l'entier naturel n ?

2. On admet que $z_{3n} = z_0$. Déterminer z_{2016} dans le cas où $z_0 = 1 + i$.

3. Existe-t-il des valeurs de z_0 tel que $z_0 = z_1$? Que peut-on dire de la suite (z_n) dans ce cas ?

Exercice 3.

On munit le plan complexe d'un repère orthonormé direct. On considère l'équation

$$(E) : z^4 + 2z^3 - z - 2 = 0$$

ayant pour inconnue le nombre complexe z.

1. Donner une solution entière de (E).

2. Démontrer que, pour tout nombre complexe z, $z^4 + 2z^3 - z - 2 = (z^2 + z - 2)(z^2 + z + 1)$

3. Résoudre l'équation (E) dans l'ensemble des nombres complexes.

Exercice 4.

On se place dans le plan complexe rapporté au repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
Soit f la transformation qui à tout nombre complexe z non nul associe le nombre complexe $f(z)$ défini par :

$$f(z) = z + \frac{1}{z}$$

On note M le point d'affixe z et M' le point d'affixe $f(z)$.

1. On appelle A le point d'affixe $a = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$

b. Déterminer la forme algébrique de $f(a)$.

2. Résoudre, dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation $f(z) = 1$.

Exercice 5.

On donne le nombre complexe $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

Partie A : propriétés du nombre *j*

1. a. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation $z^2 + z + 1 = 0$.

b. Vérifier que le nombre complexe j est une solution de cette équation.

3. Démontrer les égalités suivantes : **a.** $j^3 = 1$ **b.** $j^2 = -1 - j$

Partie B

Soit a, b, c trois nombres complexes vérifiant l'égalité $a + jb + j^2c = 0$.
On note A, B, C les images respectives des nombres a, b, c dans le plan.

1. En utilisant la question A - 3. b., démontrer l'égalité : $a - c = j(c - b)$.

3. Démontrer l'égalité : $a - b = j^2(b - c)$.

1. CORRECTION

1. a. On a $\Delta = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4 \times 1 \times c = 36 - 4c = 4(9-c)$

Or $c > 9 \Leftrightarrow 9 - c < 0$ donc $\Delta < 0$ **et l'équation du 2nd degré admet deux solutions complexes non réelles.**

b. On a $z_A = \frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{-(-6)+i\sqrt{-4(9-c)}}{2} = \frac{6+i\sqrt{4}\sqrt{-9+c}}{2} = \frac{2(3+i\sqrt{c-9})}{2} = \mathbf{3 + i\sqrt{c-9}}$

et de même $z_B = \frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \mathbf{3 - i\sqrt{c-9}}$

2. CORRECTION -

1. a. $z_0 = 2$.

$z_1 = 1 - \frac{1}{z_0} = 1 - \frac{1}{2} = \mathbf{\frac{1}{2}}$, $z_2 = 1 - \frac{1}{z_1} = 1 - \frac{1}{\frac{1}{2}} = 1 - 2 = \mathbf{-1}$, $z_3 = 1 - \frac{1}{z_2} = 1 - \frac{1}{-1} = \mathbf{2}$

Et donc, on a de façon répétitive $\boldsymbol{z_4 = \frac{1}{2}, z_5 = -1}$ **et** $\boldsymbol{z_6 = 2}$.

b. $z_0 = i$

$z_1 = 1 - \frac{1}{i} = 1 - \frac{i}{i^2} = \mathbf{1 + i}$, $z_2 = 1 - \frac{1}{1+i} = 1 - \frac{1-i}{1+1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{i}{2} = \mathbf{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} i}$,

$z_3 = 1 - \frac{1}{\frac{1+i}{2}} = 1 - \frac{2(1-i)}{1+1} = 1 - 1 + i = \boldsymbol{i}$

Et donc, on a de façon répétitive $\boldsymbol{z_4 = 1 + i, z_5 = \frac{1+i}{2}}$ **et** $\boldsymbol{z_6 = i}$.

c. On peut conjecturer que $z_{3n} = z_0$

2. On a $2016 = 3 \times 672$ donc, d'après la propriété démontrée précédemment, $z_{2016} = z_0 = 1 + i$.

3. $z_0 = z_1 \Leftrightarrow z_0 = 1 - \frac{1}{z_0} \Leftrightarrow z_0{}^2 = z_0 - 1 \Leftrightarrow z_0{}^2 - z_0 + 1 = 0$

On a $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times 1 = -3$

On a donc deux possibilités : soit $\boldsymbol{z_0 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}}$; soit $\boldsymbol{z_0 = \frac{1-i\sqrt{3}}{2}}$

La suite (z_n) est **stationnaire** dans ce cas, puisque $z_1 = z_0$ et que $z_2 = 1 - \frac{1}{z_1} = 1 - \frac{1}{z_0} = z_1$ etc…

3. CORRECTION

1. pour $z = 1$, on a bien : $z^4 + 2z^3 - z - 2 = 1 + 2 - 1 - 2 = 0$ donc **le nombre 1 est solution de** $(\boldsymbol{E})$

2. Pour tout nombre complexe z :
$(z^2 + z - 2)(z^2 + z + 1) = z^4 + z^3 + z^2 + z^3 + z^2 + z - 2z^2 - 2z - 2 = \boldsymbol{z^4 + 2z^3 - z - 2}$ **CQFD**

3. $z^4 + 2z^3 - z - 2 = 0 \Leftrightarrow (z^2 + z - 2)(z^2 + z + 1) = 0 \Leftrightarrow z^2 + z - 2 = 0 \; ou \; z^2 + z + 1 = 0$

Pour $z^2 + z - 2 = 0$ on a $\Delta = 1 + 8 = 9$ deux solutions réelles $z_1 = \frac{-1+3}{2} = 1$ et $z_2 = \frac{-1-3}{2} = -2$

Pour $z^2 + z + 1 = 0$ on a $\Delta = 1 - 4 = -3$ deux solutions complexes $z_3 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ et $z_4 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$

$$\boldsymbol{S} = \left\{ \boldsymbol{-2; 1; \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}; \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}} \right\}$$

4. CORRECTION

1. b. $f(a) = a + \frac{1}{a} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{2}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{-1+i} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{2} \times \frac{-1-i}{1+1}$

$= -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{2\sqrt{2}}{\boldsymbol{2}} = \boldsymbol{-\sqrt{2}}$

2. $f(z) = 1 \Leftrightarrow z + \frac{1}{z} = 1 \overset{z \neq 0}{\Leftrightarrow} z^2 - z + 1 = 0$ On $\Delta = (-1)^2 - 4 = -3$

Il y a deux solutions complexes : $\boldsymbol{z_1 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}}$ et $\boldsymbol{z_2 = \frac{1-i\sqrt{3}}{2}}$

5. CORRECTION

Partie A . 1. a. $z^2 + z + 1 = 0$ on a $\Delta = 1 - 4 = -3$ deux solution complexes conjuguées

$z_1 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} = j$ et $z_2 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2} = \bar{j} \Rightarrow \boldsymbol{S = \{j; \bar{j}\}}$

b. voir question précédente !

3. a. $j^3 = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \left(\frac{1}{4} - i\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{4}\right)\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = \boldsymbol{1}$

b. Comme j est solution de l'équation $z^2 + z + 1 = 0$, on a $j^2 + j + 1 = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{j^2 = -1 - j}$ **CQFD**

Partie B **1.** $a + jb + j^2c = 0 \Leftrightarrow a + jb + (-1 - j)c = 0 \Leftrightarrow a - c + jb - jc = 0$

$\Leftrightarrow a - c = -jb + jc \Leftrightarrow \boldsymbol{a - c = j(c - b)}$ **CQFD**

3. $j^2(b - c) = (-1 - j)(b - c) = c - b + j(c - b) = c - b + a - c = \boldsymbol{a - b}$ **CQFD**