

Savoir M. 1: Coefficients d'une matrice - Contextes

Exercice 1: Coefficients

1) Écrire la matrice A de format (2, 3) telle que :

$$a_{11} = 4 ; a_{22} = 0 ; a_{21} = -7 ; a_{12} = 1 ; a_{13} = -2 \text{ et } a_{23} = 3$$

2) $B = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -8 \\ 6 & 0 & 1 \\ -3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

a) Donner les coefficients b_{13}, b_{21} et b_{32}

b) Donner la notation des coefficients égaux à 2

c) Calculer les 3 sommes suivantes :

$$\sum_{i=1}^3 b_{i3} = b_{13} + b_{23} + b_{33} ; \quad \sum_{j=1}^3 b_{2j} \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^3 b_{ii}$$

3) Écrire la matrice C, matrice carrée d'ordre 3, définie par son coefficient $c_{ij} = i + j$ pour tous i et j compris entre 1 et 3

4) Écrire la matrice D, matrice carrée d'ordre 4, définie par $d_{ij} = i(4 - j)$ pour tous i et j compris entre 1 et 4

5) La matrice E est telle que $e_{ij} = 2ij^2$ pour $1 \leq i \leq 4$ et $1 \leq j \leq 2$. Préciser le format de cette matrice, puis l'écrire avec tous ses coefficients

6*) On appelle trace d'une matrice la somme des coefficients de sa diagonale principale ($Tr = \sum_i a_{ii}$)

F est une matrice carrée d'ordre n (avec $n \geq 2$) dont chacun des coefficients est défini par $f_{ij} = \frac{i+j}{2}$

Exprimer la trace de F en fonction de n .

Exercice 2: Matrices égales

1) Soit A la matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 1 & 12 \end{pmatrix}$

a) Soit B la matrice $B = \begin{pmatrix} a & 2b \\ c+4 & 12 \end{pmatrix}$. Déterminer les nombres a, b et c tels que $A = B$

b) Soit C la matrice $C = \begin{pmatrix} 2x & x-8 \\ 1 & 10-x \end{pmatrix}$. Peut-on avoir $A = C$? Justifier.

c) Soit D_n les matrices définies par $D_n = \begin{pmatrix} n^2 & -6 \\ 1 & 3n^2 \end{pmatrix}$. Pour quelle(s) valeur(s) de n a-t-on $A = D_n$?

d) Soit E_n les matrices définies par $E_n = \begin{pmatrix} n^2 + 3n & \frac{3n}{2} \\ 2n + 9 & 12 \end{pmatrix}$. Pour quelle(s) valeur(s) de n a-t-on $A = E_n$?

2) Soit S la matrice colonne $S = \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \end{pmatrix}$ et T telle que $T = \begin{pmatrix} a-2b \\ 3a+b \end{pmatrix}$. Trouver a et b pour que $S = T$

Exercice 3 : Vérifier qu'on a bien compris

1) Écrire la matrice A, matrice carrée d'ordre 4, définie par son coefficient $a_{ij} = i - j$ pour tous i et j compris entre 1 et 4

2) La matrice B est telle que $b_{ij} = -2i + 3j$ pour $1 \leq i \leq 2$ et $1 \leq j \leq 3$. Préciser le format de cette matrice, puis l'écrire avec tous ses coefficients

3) Soit A la matrice d'ordre 3 $A = \begin{pmatrix} 4 & \dots & 3 \\ \dots & -1 & \dots \\ 0 & \dots & \dots \end{pmatrix}$. Compléter la matrice, sachant que :

$$a_{12} = 5 ; a_{23} = 2 ; a_{21} = a_{22} + a_{13} ; a_{32} = 5a_{13} \text{ et } a_{33} = a_{11} + a_{23}$$

4) On considère deux matrices C et D : $C = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 1-x & 3 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & x^2 \\ x^2 + x + 1 & 3 - x \end{pmatrix}$

Déterminer x pour que $C = D$

5) Pour vérifier la connaissance et la compréhension du cours : Vrai ou faux ?

- a) Une matrice de taille $n \times p$ a p lignes et n colonnes
- b) Le coefficient d'une matrice noté a_{ij} se situe à la i -ème ligne et à la j -ème colonne
- c) Une matrice nulle est nécessairement carrée
- d) Une matrice unité est nécessairement carrée
- e) Une matrice ligne peut aussi s'écrire en matrice colonne
- f) Deux matrices égales doivent forcément avoir le même format
- g) Une matrice ligne est de format $(n, 1)$

Exercice 4 : Situations concrètes

1) Dans un magasin, on note, pour 4 modèles M_1, M_2, M_3 et M_4 , le nombre d'articles disponibles dans les tailles 1, 2, 3 et 4. La matrice carrée N est la matrice où n_{ij} désigne le nombre d'articles du modèle M_i dans la taille j .

On donne :
$$N = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 4 \\ 1 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

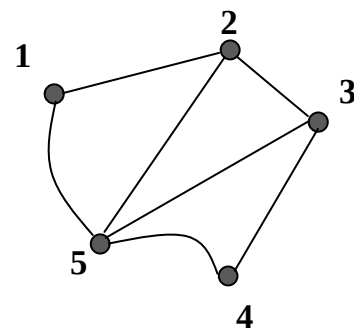
- a) Combien d'article du modèle 4 restent-ils en taille 3 ?
- b) Ajouter tous les coefficients $n_{1,j}$ pour $1 \leq j \leq 4$. Interpréter le résultat obtenu.
- c) Ajouter tous les coefficients $n_{i,2}$ pour $1 \leq i \leq 4$. Interpréter le résultat obtenu.

2) On dénombre dans un lycée 32 élèves en T^{ale} L, dont 25 filles, en T^{ale} ES 36 filles et 30 garçons, 100 élèves en T^{ale} S dont 62 garçons et 32 filles et 28 garçons en T^{ale} STMG.

- a) Déterminer la matrice E de format (2,4) donnant les effectifs filles/garçons des différentes filières.
- b) Que représente $\sum_{i=1}^2 e_{i,4}$?
- c) Que représente $\sum_{j=1}^4 e_{2,j}$?

Exercice 5 : Graphes

1) Chaque matin, parmi 5 élèves d'une même classe, certains se serrent la main et d'autres non, selon le schéma ci-contre.
On définit la matrice des poignées de mains comme suit : l'élément a_{ij} de A vaut 1 si l'élève i a serré la main de l'élève j et 0 sinon.



- Donner la matrice A
- Quelle remarque sur les coefficients a_{ij} et a_{ji} peut-on faire ? Justifier.

2) Une étude est faite sur une population de salariés qui se déplacent en utilisant un des trois moyens de transports suivants : voiture (1), transports en commun (2) ou vélo (3).

Selon les conditions de circulation, de temps et de transports, on observe les statistiques suivantes :

- Un salarié qui s'est déplacé le 1^{er} jour en voiture, n'a que 20% de chances de reprendre la voiture le lendemain et 70% de chances de prendre les transports en commun.
- Un salarié qui s'est déplacé le 1^{er} jour en transport en commun, aura 60% de chances de reprendre les transports en commun le lendemain et 10% de chances de prendre la vélo.
- Un salarié qui s'est déplacé le 1^{er} jour en vélo, aura 10% de chances de prendre la voiture le lendemain et 40% de chances de prendre les transports en commun.

- Donner la matrice A où le coefficient a_{ij} donne la probabilité qu'un salarié ayant choisi le moyen de transport i aujourd'hui prendra le moyen de transport j demain.
- Établir un graphe représentant la situation

Exercice 6 : Et un peu plus...

1) La matrice ci-contre représente les longueurs des sauts, en mètres, de 4 concurrents nommés A, B, C et D s'affrontant au triple saut lors de leurs trois essais dans une compétition.

(17,71	17,08	17,58	17,69)
17,65	17,57	17,72	17,65
17,82	17,48	17,61	17,74)

- Quelle est la longueur du saut réalisé au 2^e essai par C ?
- Quel est le concurrent ayant réalisé le meilleur saut ? à quel essai ?
- Quelle information donne le plus grand coefficient figurant dans une colonne ? dans une ligne ?

2) Dans le cadre d'une étude sur les interactions sociales entre des souris, des chercheurs enferment des souris de laboratoire dans une cage comportant deux compartiments 1 et 2. La porte entre ces compartiments est ouverte pendant dix minutes tous les jours à midi.

On étudie la répartition des souris dans les deux compartiments. On estime que chaque jour :

- 20% des souris présentes dans le compartiment 1 avant l'ouverture de la porte se trouvent dans le compartiment 2 après fermeture de la porte,
- 10% des souris qui étaient dans le compartiment 2 avant l'ouverture de la porte se trouvent dans le compartiment 1 après fermeture de la porte.

- Établir un graphe représentant la situation
- Donner la matrice S où le coefficient s_{ij} donne la probabilité qu'une souris qui était dans le compartiment i soit passée dans le compartiment j .

3) La figure ci-contre schématise le nombre de liens internes à deux sites web, ou reliant ces deux site entre eux (attention, les liens ne sont pas symétriques, les flèches indiquent le sens du lien.)
Définir la matrice L des liens telle que l'élément l_{ij} de cette matrice est le nombre de liens du site i vers le site j .

