Corrigé Exercice 12

1) a) $AB = \begin{pmatrix} 21-20 & -35+35 \\ 12-12 & -20+21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$

$\Rightarrow$ A est une matrice carré, elle est donc inversible et on a bien $\boldsymbol{A^{-1} = B}$

b) $AB = \begin{pmatrix} 1+0+0 & -2+2+3 & -5+2+3 \\ 0+0+0 & 0+1+0 & 0+1-1 \\ 0+0+0 & 0+0+0 & 0+0+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$

$\Rightarrow$ A et B sont des matrices carrées, donc A est inversible et o n a bien $\boldsymbol{A^{-1} = B}$

2) a) $Det(A) = 10 - 12 = -2 \neq 0$ $\Rightarrow$ La matrice A est inversible et $A^{-1} = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{-1} & \mathbf{\frac{3}{2}} \\ \mathbf{2} & \mathbf{-\frac{5}{2}} \end{pmatrix}$

b) $Det(B) = -12 + 12 = 0$ $\Rightarrow$ La matrice B **n'est pas inversible**

c) $Det(C) = 16 - 0 = 16 \neq 0$ $\Rightarrow$ La matrice C est inversible et $C^{-1} = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{\frac{1}{4}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{\frac{1}{4}} \end{pmatrix}$

Rappel : une matrice diagonale de coefficients tous non nuls a_{ii}est toujours inversible, et son inverse est la matrice diagonale de coefficient $\frac{1}{a_{ii}}$

d) $Det(D) = 2 - 0 = 2 \neq 0$ $\Rightarrow$ La matrice D est inversible et $D^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{-\frac{1}{2}} & \mathbf{\frac{3}{2}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-1} \end{pmatrix}$

3) $Det(A) = b - a$ Pour que la matrice A soit inversible, il faut donc que $b - a \neq 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{b \neq a}$.

On aura alors $A^{-1} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{b} & \boldsymbol{-a} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$

$Det(B) = 1 - dc$ Pour que la matrice B soit inversible, il faut que $1 - cd \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \text{ ou } d = 0 \\ c \neq 0, d \neq 0 \text{ et } \boldsymbol{c \neq \frac{1}{d}} \end{cases}$.

On aura alors $B^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \boldsymbol{-c} \\ \boldsymbol{-d} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$

4) $D^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ C'est sympa les matrices diagonales…

5) a) $AB = \begin{pmatrix} -5+12 & 30-30 \\ -2+2 & 12-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} = \boldsymbol{7I_2}$

Donc $A \times \left(\frac{1}{7}B\right) = I_2$ A est une matrice carrée, donc A est inversible et $\boldsymbol{A^{-1} = \frac{1}{7}B}$

b) $AB = \begin{pmatrix} 6+6+0 & 2-2+0 & -2+2+0 \\ 12-18+6 & 4+6+2 & -4-6+10 \\ -6+0+6 & -2+0+2 & 2+0+10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix} = \boldsymbol{12I_3}$ Donc $A \times \left(\frac{1}{12}B\right) = I_3$

A est une matrice carrée donc elle est inversible et $\boldsymbol{A^{-1} = \frac{1}{12}B}$

6) a) $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{13}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{5}{6} \\ -\frac{4}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{10}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{5}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} \mathbf{13} & \mathbf{-1} & \mathbf{5} \\ \mathbf{-8} & \mathbf{2} & \mathbf{-4} \\ \mathbf{20} & \mathbf{-2} & \mathbf{10} \end{pmatrix}$ b) $B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & 1 & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & 0 & -\frac{1}{6} \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 1 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} \mathbf{8} & \mathbf{-2} & \mathbf{6} & \mathbf{-4} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{6} & \mathbf{0} & \mathbf{6} & \mathbf{-6} \\ \mathbf{4} & \mathbf{2} & \mathbf{6} & \mathbf{-2} \end{pmatrix}$

La 2$^{\text{ème}}$ forme (avec la fraction factorisée) n'est pas obligatoire, mais tellement plus élégante, mathématiquement parlant…

Corrigé Exercice 13

1) a) $AB = \begin{pmatrix} 4-3 & -2+2 \\ 6-6 & -3+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$

A est une matrice carrée donc elle est inversible et on a bien $A^{-1} = B$

b) On peut calculer AB et faire tous les calculs avec des $\frac{1}{8}$… avec $B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{3}{8} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$… mais c'est un peu fatiguant ;-)

ou alors calculer sans les $\frac{1}{8}$ et prouver que ça fait 8I… Si on pose $C = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -4 \\ 1 & 2 & 3 \\ -2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

$$AC = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 & 0 & -4 \\ 1 & 2 & 3 \\ -2 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+2+2 & 0+4-4 & -4+6-2 \\ 0+4-4 & 0+0+8 & -4+0+4 \\ -4+2+2 & 0+4-4 & 4+6-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} = 8I_3$$

Donc $A \times \left(\frac{1}{8}C\right) = I_3 \iff A \times B = I_3 \Rightarrow$ A est une matrice carrée donc elle est inversible et $\boldsymbol{A^{-1} = B}$

2) $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

3) a) $AB = \begin{pmatrix} -4+0 & 0+0 \\ -24+24 & 0-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} = -4I_2 \Rightarrow$ Donc $A \times \left(-\frac{1}{4}B\right) = I_2$

A est une matrice carrée donc elle est inversible et $\boldsymbol{A^{-1} = -\frac{1}{4}B}$

b) $AB = \begin{pmatrix} 0+0+10 & 0-4+4 & 0-2+2 \\ 0+0+0 & 2+8+0 & -4+4+0 \\ 0+0+0 & -4+4+0 & 8+2+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} = 10I_3$

Donc $A \times \left(\frac{1}{10}B\right) = I_3 \Rightarrow$ A est une matrice carrée donc elle est inversible et et $\boldsymbol{A^{-1} = \frac{1}{10}B}$

Corrigé Exercice 14

1) $A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I_2$ $A^3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -A$ $A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$

On a donc $A \times A^3 = I_2$

A est une matrice carrée donc elle est inversible et donc $\boldsymbol{A^{-1} = A^3 = -A}$

2) $A^2 - 6A + 3I = 0 \iff A^2 - 6A = -3I$

$\iff A(A - 6I) = -3I$

$\iff A \times \left(-\frac{1}{3}(A - 6I)\right) = I$

$\iff A \times \left(-\frac{1}{3}A + 2I\right) = I$

A est une matrice carrée donc elle est inversible et donc on a bien $\boldsymbol{A^{-1} = -\frac{1}{3}A + 2I}$

3) a) $A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ et $2A + I_2 = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = A^2$

b) $A(A - 2I_2) = A^2 - 2A = (2A + I) - 2A = I$

c) A est une matrice carrée donc elle est inversible et on a $\boldsymbol{A^{-1} = A - 2I_2} \Rightarrow$ Donc $A^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{-1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-1} \end{pmatrix}$

Corrigé Exercice 15

Extrait 1

$QD = \begin{pmatrix} -1{,}75 & 3 \\ 1{,}25 & 5 \end{pmatrix}$ et $(QD) \times Q^{-1} = \begin{pmatrix} 0{,}125 & 0{,}525 \\ 0{,}625 & 0{,}625 \end{pmatrix} = A$

Extrait 2

a. $(I-M) \times \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}3 & -0{,}2 \\ -0{,}1 & 0{,}4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}2-0{,}2 & 0{,}6-0{,}6 \\ -0{,}4+0{,}4 & -0{,}2+1{,}2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$

b. On a donc $(I-M) \times \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = I$ et $(I-M)$ est une matrice carrée, elle est donc inversible et la matrice inverse de $(I-M)$ est $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

c. $U = M \times U + P \iff U - MU = P$

$\iff (I-M)U = P$

$\iff (I-M)^{-1} \times (I-M)U = (I-M)^{-1} \times P$

$\iff U = (I-M)^{-1} \times P$

On a donc $U = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 60 \\ 70 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 380 \\ 270 \end{pmatrix}$

Extrait 3

a) $PP' = \begin{pmatrix} \frac{4}{10}+\frac{6}{10} & -\frac{4}{10}+\frac{6}{15} \\ -\frac{6}{10}+\frac{6}{10} & \frac{6}{10}+\frac{6}{15} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$

b) On a $P' = P^{-1}$ Donc $P^{-1}BP = A \iff P \times (P^{-1}BP) = P \times A$

$\iff (PP^{-1}) \times BP = PA$

$\iff BP = PA \iff BP \times P^{-1} = PA \times P^{-1}$

$\iff \boldsymbol{B = PAP^{-1}}$

Extrait 4

a) $PQ = \begin{pmatrix} 1+5 & 1-1 \\ 5-5 & 5+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} = 6I$ De même $QP = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} = 6I$

On a donc $P \times \left(\frac{1}{6}Q\right) = I$ Or P est une matrice carrée, elle est donc inversible et $P^{-1} = \frac{1}{6}Q$

b) *N'hésitez pas à laisser le $\frac{1}{6}$ de côté dans vos calculs jusqu'à la fin… ça évite des calculs fractionnaires pénibles. De plus, vu que le produit de matrice a déjà été détaillé dans la question a, n'hésitez pas à faire les calculs à la calculatrice… Il faut juste donne une étape intermédiaire*

$P^{-1}A = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0{,}95 & 0{,}01 \\ 0{,}05 & 0{,}99 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -4{,}7 & 0{,}94 \end{pmatrix}$

et $P^{-1}AP = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -4{,}7 & 0{,}94 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 5.64 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0{,}94 \end{pmatrix}$ On a donc $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0{,}94 \end{pmatrix}$

Extrait 5

a) $C = A \times C + B \iff C - AC = B$

$\iff (I-A)C = B$

$\iff NC = B$

b) $NC = B \iff N^{-1}NC = N^{-1}B$

$\iff C = N^{-1}B$

Donc $C = \begin{pmatrix} \frac{45}{23} & \frac{20}{23} \\ \frac{10}{23} & \frac{30}{23} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0{,}1 \\ 0{,}2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{45}{23} & \frac{20}{23} \\ \frac{10}{23} & \frac{30}{23} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{1}{10} \\ \frac{2}{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{45+40}{230} \\ \frac{10+60}{230} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{17}{46} \\ \frac{7}{23} \end{pmatrix}$

Extrait 6

a) $A^2 = \begin{pmatrix} 16+3 & 4+2 \\ 12+6 & 3+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 6 \\ 18 & 7 \end{pmatrix}$ Donc $6A - A^2 = \begin{pmatrix} 24 & 6 \\ 18 & 12 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 19 & 6 \\ 18 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \mathbf{5I}$

b) On a donc $6A - A^2 = 5I \Leftrightarrow A(6I - A) = 5I \Leftrightarrow A \times \frac{1}{5}(6I - A) = I$

Or A est un matrice carrée, elle est donc inversible et $\boldsymbol{A^{-1}} = \boldsymbol{\frac{6}{5}I - \frac{1}{5}A}$

c) $5A^{-1} = 5 \times \left(\frac{6}{5}I - \frac{1}{5}A\right) = 6I - A = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} = \boldsymbol{B}$

Extrait 7

a) $M^2 = \begin{pmatrix} 1+1+4 & 1-1+2 & 1+1+1 \\ 1-1+4 & 1+1+2 & 1-1+1 \\ 4+2+4 & 4-2+2 & 4+2+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 1 \\ 10 & 4 & 7 \end{pmatrix}$

b) $M^2 + 8M + 6I = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 1 \\ 10 & 4 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 & 8 & 8 \\ 8 & -8 & 8 \\ 32 & 16 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 10 & 11 \\ 12 & 2 & 9 \\ 42 & 20 & 21 \end{pmatrix} = M^3$

c) $M^3 = M^2 + 8M + 6I \Leftrightarrow M^3 - M^2 - 8M = 6I$

$\Leftrightarrow M(M^2 - M - 8I) = 6I$

$\Leftrightarrow M \times \frac{1}{6}(M^2 - M - 8I) = I$

Or M est une matrice carrée, elle est donc inversible et on a bien $M^{-1} = \frac{1}{6}(M^2 - M - 8I)$

Corrigé Exercice 16

1) a) $B^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \boldsymbol{B + 2I_3}$

b) $B(B - I_3) = B^2 - B = (B + 2I_3) - B = \boldsymbol{2I_3}$

c) On a $B \times \frac{1}{2}(B - I_3) = I_3$ OrB est une matrice carrée donc elle est inversible

et donc $B^{-1} = \boldsymbol{\frac{1}{2}(B - I_3)}$ et $B^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \mathbf{-1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

2) Questions 1 : il suffit en général de multiplier par A^{-1} pour démontrer ces questions

a) **Vrai** : $AM = O \Leftrightarrow A^{-1} \times (AM) = A^{-1} \times O$

$\Leftrightarrow (A^{-1}A) \times M = O$

$\Leftrightarrow M = O$

b) **Vrai** : $AM = AN \Leftrightarrow A^{-1} \times (AM) = A^{-1} \times (AN)$

$\Leftrightarrow (A^{-1}A) \times M = (A^{-1}A) \times N$

$\Leftrightarrow IM = IN$

$\Leftrightarrow M = N$

Question 2 : Parfaitement **vrai**

Question 3 : **Vrai** (encore) : $(AB) \times (B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I$

Question 4 : **Faux** cette fois… il faut que la matrice diagonale n'ait aucun coefficient non nul …

3) a) $M(M - aI) = M^2 - aM = (aM + bI) - aM = bI$

b) Si $b \neq 0$ alors M est inversible car $M \times \left(\frac{1}{b}(M - aI)\right) = I$ et $\boldsymbol{M^{-1} = \frac{1}{b}(M - aI)}$