

Entraînements Sujets BAC

1. Métropole - Sept 2021 - 1

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]-\frac{1}{3}; +\infty[$, par : $f(x) = \frac{4x}{1+3x}$

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = \frac{1}{2}$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Calculer u_1 .

2. On admet que la fonction f est croissante sur l'intervalle $]-\frac{1}{3}; +\infty[$.

a. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a : $\frac{1}{2} \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 2$.

b. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

c. On appelle ℓ la limite de la suite (u_n) . Déterminer la valeur de ℓ .

3. a. Recopier et compléter la fonction Python ci-contre qui, pour tout réel positif E , détermine la plus petite valeur P tel que : $1 - u_P < E$.

b. Donner la valeur renvoyée par ce programme dans le cas où $E = 10^{-4}$.

```
def seuil(E):  
    u = 0,5  
    n = 0  
    while .....  
        u = .....  
        n = n + 1  
    return n
```

4. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n , par :

$$v_n = \frac{u_n}{1 - u_n}$$

a. Montrer que la suite (v_n) est géométrique de raison 4.

En déduire, pour tout entier naturel n , l'expression de v_n en fonction de n .

b. Démontrer que, pour tout entier naturel n , on a : $u_n = \frac{v_n}{v_n + 1}$

c. Montrer alors que, pour tout entier naturel n , on a : $u_n = \frac{1}{1 + 0,25^n}$

Retrouver par le calcul la limite de la suite (u_n)

2. Métropole - Mars 2021 - 1

La suite (u_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + \frac{1}{4}n + 1$$

1. Calculer, en détaillant les calculs, u_1 et u_2 sous forme de fraction irréductible.

L'extrait, reproduit ci-contre, d'une feuille de calcul réalisée avec un tableur présente les valeurs des premiers termes de la suite (u_n) .

	A	B
1	n	u_n
2	0	1
3	1	1,75
4	2	2,5625
5	3	3,421875
6	4	4,31640625

2. a. Quelle formule, étirée ensuite vers le bas, peut-on écrire dans la cellule B3 de la feuille de calcul pour obtenir les termes successifs de (u_n) dans la colonne B?

b. Conjecturer le sens de variation de la suite (u_n) .

3. a. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a : $n \leq u_n < n + 1$.

b. En déduire, en justifiant la réponse, le sens de variation et la limite de la suite (u_n) .

c. Démontrer que : $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{n} = 1$

4. On désigne par (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_n - n$

a. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{3}{4}$

b. En déduire que, pour tout entier naturel n , on a : $u_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n + n$

3. Centres étrangers - Juin 2021 - 1

En mai 2020, une entreprise fait le choix de développer le télétravail afin de s'inscrire dans une démarche éco-responsable.

Elle propose alors à ses 5 000 collaborateurs en France de choisir entre le télétravail et le travail au sein des locaux de l'entreprise.

En mai 2020, seuls 200 d'entre eux ont choisi le télétravail.

Chaque mois, depuis la mise en place de cette mesure, les dirigeants de l'entreprise constatent que 85% de ceux qui avaient choisi le télétravail le mois précédent choisissent de continuer, et que, chaque mois, 450 collaborateurs supplémentaires choisissent le télétravail.

On modélise le nombre de collaborateurs de cette entreprise en télétravail par la suite (a_n) .

Le terme a_n désigne ainsi une estimation du nombre de collaborateurs en télétravail le n -ième mois après le mois de mai 2020. Ainsi $a_0 = 200$.

Partie A :

1. Calculer a_1 .
2. Justifier que pour tout entier naturel n , $a_{n+1} = 0,85a_n + 450$.
3. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par : $v_n = a_n - 3000$.
 - a. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,85.
 - b. Exprimer v_n en fonction de n pour tout entier naturel n .
 - c. En déduire que, pour tout entier naturel n , $a_n = -2800 \times 0,85^n + 3000$.
4. Déterminer le nombre de mois au bout duquel le nombre de télétravailleurs sera strictement supérieur à 2 500, après la mise en place de cette mesure dans l'entreprise.

Partie B :

Afin d'évaluer l'impact de cette mesure sur son personnel, les dirigeants de l'entreprise sont parvenus à modéliser le nombre de collaborateurs satisfaits par ce dispositif à l'aide de la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n ,

$$u_{(n+1)} = \frac{5u_n + 4}{u_n + 2}$$

où u_n désigne le nombre de milliers de collaborateurs satisfaits par cette nouvelle mesure au bout de n mois après le mois de mai 2020.

1. Démontrer que la fonction f définie pour tout $x \in [0 ; +\infty[$ par $f(x) = \frac{5x+4}{x+2}$ est strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$.
2.
 - a. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel : $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 4$.
 - b. Justifier que la suite (u_n) est convergente.
3. On admet que pour tout entier naturel n , $0 \leq 4 - u_n \leq 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$.
En déduire la limite de la suite (u_n) et l'interpréter dans le contexte de la modélisation

4. Métropole - Mars 2021 - 2

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies pour tout entier naturel n par :
$$\begin{cases} u_0 = v_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + v_n \\ v_{n+1} = 2u_n + v_n \end{cases}$$

Dans toute la suite de l'exercice, on **admet** que les suites (u_n) et (v_n) **sont strictement positives**.

1. a. Calculez u_1 et v_1 .

b. Démontrer que la suite (v_n) est strictement croissante, puis en déduire que, pour tout entier naturel n , $v_n \geq 1$.

c. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a : $u_n \geq n + 1$.

d. En déduire la limite de la suite (u_n) .

2. On pose, pour tout entier naturel n : $r_n = \frac{v_n}{u_n}$

On admet que : $r_n^2 = 2 + \frac{(-1)^{n+1}}{u_n^2}$

a. Démontrer que pour tout entier naturel n : $-\frac{1}{u_n^2} \leq \frac{(-1)^{n+1}}{u_n^2} \leq \frac{1}{u_n^2}$

b. En déduire : $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^{n+1}}{u_n^2}$

c. Déterminer la limite de la suite (r_n^2) et en déduire que (r_n) converge vers $\sqrt{2}$.

d. Démontrer que pour tout entier naturel n , $r_{n+1} = \frac{2+r_n}{1+r_n}$

5. Métropole - Juin 2021 - 2

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} = \frac{4u_n}{u_n + 4}$$

1. La copie d'écran ci-contre présente les valeurs, calculées à l'aide d'un tableur, des termes de la suite (u_n) pour n variant de 0 à 12, ainsi que celles du quotient $\frac{4}{u_n}$, (avec, pour les valeurs de u_n , affichage de deux chiffres pour les parties décimales).
À l'aide de ces valeurs, conjecturer l'expression de $\frac{4}{u_n}$ en fonction de n .

Le but de cet exercice est de démontrer cette conjecture (question 5.), et d'en déduire la limite de la suite (u_n) (question 6.).

2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a : $u_n > 0$.

3. Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.

4. Que peut-on conclure des questions 2. et 3. concernant la suite (u_n) ?

5. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par : $v_n = \frac{4}{u_n}$.
Démontrer que (v_n) est une suite arithmétique.
Préciser sa raison et son premier terme.
En déduire, pour tout entier naturel n , l'expression de v_n en fonction de n .

6. Déterminer, pour tout entier naturel n , l'expression de u_n en fonction de n .
En déduire la limite de la suite (u_n)

n	u_n	$\frac{4}{u_n}$
0	1,00	4
1	0,80	5
2	0,67	6
3	0,57	7
4	0,50	8
5	0,44	9
6	0,40	10
7	0,36	11
8	0,33	12
9	0,31	13
10	0,29	14
11	0,27	15
12	0,25	16

6. Métropole - Sept 2021 - 2

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par : $u_0 = 16$; $v_0 = 5$; et pour tout entier naturel n :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{3u_n + 2v_n}{5} \\ v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \end{cases}$$

1. Calculer u_1 et v_1 .
2. On considère la suite (w_n) définie pour tout entier naturel n par : $w_n = u_n - v_n$.
 - a. Démontrer que la suite (w_n) est géométrique de raison 0,1.
En déduire, pour tout entier naturel n , l'expression de w_n en fonction de n .
 - b. Préciser le signe de la suite (w_n) et la limite de cette suite.

3. a. Démontrer que, pour tout entier naturel n , on a : $u_{n+1} - u_n = -0,4w_n$.
 - b. En déduire que la suite (u_n) est décroissante.

On peut démontrer de la même manière que la suite (v_n) est croissante.

On admet ce résultat, et on remarque qu'on a alors : pour tout entier naturel n , $v_n \geq v_0 = 5$.

- c. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a : $u_n \geq 5$.
En déduire que la suite (u_n) est convergente. On appelle ℓ la limite de (u_n)

On peut démontrer de la même manière que la suite (v_n) est convergente.

On admet ce résultat, et on appelle ℓ' la limite de (v_n) .

4. a. Démontrer que $\ell = \ell'$.
 - b. On considère la suite (c_n) définie pour tout entier naturel n par : $c_n = 5u_n + 4v_n$.
Démontrer que la suite (c_n) est constante, c'est-à-dire que pour tout entier naturel n , on a : $c_{n+1} = c_n$.
En déduire que, pour tout entier naturel n , $c_n = 100$.
 - c. Déterminer la valeur commune des limites ℓ et ℓ' .