Savoir Fi. 2 : Calcul d'intégrales

Exercice 6 : Calcul d'intégrales

1) Soit la fonction g définie sur]0 ;+∞[par $g(x) = (6x^2 - 2x + 3)e^{x^2}$

On admet que la fonction $G(x) = (3x - 1)e^{x^2}$ est une primitive de g. Calculer $\int_0^1 g(t)dt$

2) Soit la fonction f définie sur]0 ;+∞[par $f(x) = \frac{\mathbf{2(x^2-1)}}{\boldsymbol{x}}$

a. Montrer que la fonction $F(x) = x^2 - 2\ln(x)$ est une primitive de f **b.** Calculer $\int_1^e f(t)dt$

3) On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = x \ln x$.

a. Déterminer les réels a et b tels que la fonction $F(x) = ax^2 \ln x + bx^2$ soit une primitive de f

b. En déduire la valeur de $\int_1^e f(t)dt$

Exercice 7 : Calcul d'intégrales

1) Calculer les intégrales suivantes (calcul de primitive et valeurs exacte ! même si à la fin vous pouvez vérifier à la calculatrice…)

		Plus loin…		
$\mathcal{A} = \displaystyle\int_1^2 \left(2 - \frac{4}{x}\right) dx$	$\mathcal{B} = \displaystyle\int_0^1 (2t^2 - 1)\, dt$		$\mathcal{G} = \displaystyle\int_{-2}^{-1} \left(\frac{x^3}{2} - \frac{2}{x^3}\right) dx$	$\mathcal{H} = \displaystyle\int_{-1}^{0} \left(1 + \frac{1}{2}e^{-t}\right) dt$
$\mathcal{C} = \displaystyle\int_{-1}^2 (1+u)^2\, du$	$\mathcal{D} = \displaystyle\int_0^3 e^{3\lambda}\, d\lambda$		$\mathcal{I} = \displaystyle\int_1^4 \left(\frac{2}{\sqrt{x}} + x\right) dx$	$\mathcal{J} = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-x}}{1 + e^{-x}}\, dx$
$\mathcal{E} = \displaystyle\int_0^{e-1} \frac{1}{x+1}\, dx$	$\mathcal{F} = \displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin(2x)\, dx$		$\mathcal{K} = \displaystyle\int_{-2}^{3} (t^2 - 4t)\, dt$	$\mathcal{M} = \displaystyle\int_1^e \frac{\ln x}{x}\, dx$

2) En remarquant que, pour $x > 1$, $\frac{1}{x \ln x} = \frac{\frac{1}{x}}{\ln x}$, calculer l'intégrale $I = \int_e^{e^2} \frac{1}{x \ln x}\, dx$

Exercice 8 : Alors ?

Pour tout réel a positif, montrer que :

$$\int_0^a \left(3 - \frac{3}{1 + e^{-2x}}\right) dx = \frac{3}{2} \ln\left(\frac{2}{1 + e^{-2a}}\right)$$

Exercice 9 : Calcul de fonctions définies par intégrales

1) Déterminer une expression littérales des fonctions $F_k(x)$

		Plus loin…	
$F_1(x) = \displaystyle\int_1^x \left(1 - e^{2\lambda}\right) d\lambda$	$F_2(x) = \displaystyle\int_e^x \frac{2}{t}\, dt$		$F_3(x) = \displaystyle\int_x^1 (2a - 3)da$

2) On définit sur $[0; +\infty]$ la fonction G par $G(T) = \int_0^T \frac{(1-x)}{x+3} dx$.

a. Trouver deux réels a et b tels que, pour tout réel $x \geq 0$, on ait $\frac{1-x}{x+3} = a + \frac{b}{x+3}$

b. En déduire une expression de $G(T)$

c. Calculer $\int_0^1 \frac{(1-x)}{x+3} dx$