Ed.5 - Equations différentielles $y' = f$ et $y' = ay$

1°) Résolution de $y' = f$

a) Ensemble des solutions

Ex :

$$y' = x^4$$

Une primitive de x^4 est $\frac{x^5}{5}$. Les solutions sont les fonctions de la forme $\frac{x^5}{5} + k$.

Soit F une primitive de f.

- Les solutions de l'équation différentielle $y' = f$ sur I sont les fonctions de la forme

$$\boldsymbol{F_k : x \mapsto F(x) + k}$$

où $k \in \mathbb{R}$ est une constante

Exemple 1 : $y' = 2x$.
Une primitive de $2x$ est x^2.
L'ensemble des solutions est :

$$S = \{x^2 + k \quad : \quad k \in \mathbb{R}\}$$

Exemple 2 : $y' = x + \cos x$

Une primitive de $x + \cos x$ est $\frac{x^2}{2} + \sin x$ donc :

$$S = \left\{\frac{x^2}{2} + \sin x + k' \quad : \quad k' \in \mathbb{R}\right\}$$

Exemple 3 : $3y' - x^2 = 0$
Il faut se ramener à $y' = qqch$ il faut isoler y'.

$$3y' - x^2 = 0 \Leftrightarrow 3y' = x^2 \Leftrightarrow y' = \frac{1}{3}x^2$$

Une primitive de $\frac{1}{3}x^2$ est $\frac{1}{3} \times \frac{x^3}{3} = \frac{x^3}{9}$.

$$S = \left\{\frac{x^3}{9} + A \quad : \quad A \in \mathbb{R}\right\}$$

b) Solutions vérifiant une condition initiale

Ex : $y' = 2x$.
Soit g une solution de cette équation différentielle telle que $g(3) = 2$. Déterminer l'expression de $g(x)$ en fonction de x.
On a : $g(x) = x^2 + k$ avec $g(3) = 2 \Rightarrow 9 + k = 2 \Rightarrow k = -7$
Au final on a donc :

$$g(x) = x^2 - 7$$

Ex 2 : $x' = \frac{3}{t}$
La fonction inconnue est x et la variable est t.
Déterminer la solution h de cette équation différentielle qui prend la valeur 1 en $t = 2$.

Une primitive de $\frac{3}{t}$ est $3\ln t$ donc $h(t) = 3\ln t + A$ avec

$$h(2) = 1 \Rightarrow 3\ln 2 + A = 1 \Rightarrow A = 1 - 3\ln 2 \quad \left(= \ln\frac{e}{8}\right)$$

Donc

$$h(t) = 3\ln t + 1 - 3\ln 2 \quad \left(= 3\ln\frac{t}{2} + 1\right)$$

⇒ Ed5 Exercices 8 et 9

2°) Solutions de $y' = ay$

a) Ensemble des solutions

Soit $a \neq 0$. On considère l'équation différentielle

$$y' = ay$$

On s'intéresse aux solutions de cette équation définies sur un intervalle I.
(par exemple sur $[3; 7]$ ou sur $[2; +\infty[$ ou sur $]-\infty; 6[$…)

Si $a = 0$ alors l'équation devient :

$$y' = 0$$

Les solutions sont… les fonctions constantes.

Si $a = 1$ alors l'équation devient :

$$y' = y$$
$$(e^x)' = e^x$$
$$(9e^x)' = 9e^x$$
$$(e^x + 2)' = e^x \neq e^x + 2$$

Si $a \neq 0$: par ex $y' = 10y$

$$(e^{10x})' = 10e^{10x}$$

On admettra le résultat suivant :

Les solutions de $y' = ay$ sont les fonctions de la forme :

$$f_k \quad : \quad x \mapsto Ke^{ax}$$

où K est une constante.

Exemples

$$y' = 6y$$

$$S = \{Ke^{6x} \quad : \quad K \in \mathbb{R}\}$$

$$3y' + y = 0$$

Méthode : isoler le y'.

$$\Leftrightarrow 3y' = -y \Leftrightarrow y' = -\frac{1}{3}y$$

$$S = \left\{Ke^{-\frac{1}{3}x} \quad : \quad K \in \mathbb{R}\right\}$$

b) Solutions vérifiant une condition initiale

Exemples

$$y' = 7y$$

Déterminer la solution f vérifiant $f(0) = 3$.

On a $f(x) = Ke^{7x}$ avec $f(0) = 3 \Rightarrow Ke^{7\times 0} = 3 \Rightarrow K = 3$

$$f(x) = 3e^{7x}$$

$$2y' - y = 0$$

Déterminer la solution g vérifiant $g(1) = -5$.

$$2y' - y = 0 \Leftrightarrow 2y' = y \Leftrightarrow y' = \frac{1}{2}y$$

On a donc $g(t) = Ae^{t/2}$ avec $g(1) = -5 \Rightarrow A\sqrt{e} = -5 \Rightarrow \; A = -\frac{5}{\sqrt{e}}$

Donc

$$g(t) = -\frac{5}{\sqrt{e}}e^{t/2}$$

⇒ Ed5 Exercices 10, 11 et 12