Ed.4 - Equations différientielles Vérification de solutions

1°) Montrer qu'une fonction est solution de $y' = f$

Exemple :

$$(E)\ :\quad y' = 2x$$

On donne les fonctions

$$g : x \mapsto x^2 + 5 \quad \text{et} \quad h : x \mapsto 1 - x + x^2$$

Sont-elles solutions de cette équation différentielle ?

ATTENTION : dans l'équation $y' = 2x$, l'inconnue est une **fonction** : c'est la fonction y.
La fonction g sera solution de cette équation si, lorsqu'on remplace y par g, l'égalité est bien vérifiée.

Pour g : On calcule $g'(x) = (x^2+5)' = 2x + 0 = 2x$ donc g est solution de (E)

Pour h : $h'(x) = 0 - 1 + 2x = 2x - 1 \neq 2x$ donc h n'est pas solution de (E)

2°) Autres équations différentielles d'ordre 1

Exemple :

$$(E)\ :\ \ y' + y = 0$$

On donne les fonction :

$f(x) = e^{-x}$ $\qquad g(x) = e^{2x}$ $\qquad h(x) = 2e^{-x}$ $\qquad a(x) = 3 + e^{-x}$

Sont-elles solutions de cette équation ?

METHODE : on remplace y par la fonction proposée et on observe si l'égalité est vérifiée ou non

Pour f :

$$f'(x) + f(x) = -e^{-x} + e^{-x} = 0 \Rightarrow \quad f\ est\ solution\ de\ (E)$$

Pour g :

$$g'(x) + g(x) = 2e^{2x} + e^{2x} = 3e^{2x} \neq 0 \Rightarrow g\ n'est\ pas\ solution$$

$$h'(x) + h(x) = -2e^{-x} + 2e^{-x} = 0 \Rightarrow \quad h\ est\ solution$$

$$a'(x) + a(x) = 0 - e^{-x} + 3 + e^{-x} = 3 \neq 0 \Rightarrow a\ n'est\ pas\ solution$$

Exemple 2 :

$$y^2 + (y')^2 = 1$$

La fonction $f = x^2$ est-elle solution ?

$$f(x)^2 + f'(x)^2 = (x^2)^2 + (2x)^2 = x^4 + 4x^2 \neq 1$$

f n'est pas solution

La fonction $g = \cos x$ est-elle solution ?

$$g(x)^2 + g'(x)^2 = \cos^2 x + \left(-sin(x)\right)^2 = \cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

g est solution

Proposer une autre solution particulière.

$$h(x) = \sin x$$

Exemple 3 :

$$y' + x^2 = y + 2$$

La fonction $f = x^2$ est-elle solution ?

D'une part à gauche : $f'(x) + x^2 = 2x + x^2$
D'autre part à droite : $f(x) + 2 = x^2 + 2 \neq f'(x) + x^2$
donc f n'est pas solution

La fonction $g = x^2 + 2x$ est-elle solution ?

D'une part à gauche : $g'(x) + x^2 = 2x + 2 + x^2$
D'autre part à droite : $g(x) + 2 = x^2 + 2x + 2 = g'(x) + x^2$

donc g est solution.

La fonction $h = x^2 + 2x + 3e^x$ est-elle solution ?

D'une part à gauche : $h'(x) + x^2 = 2x + 2 + 3e^x + x^2$
D'autre part à droite : $h(x) + 2 = x^2 + 2x + 3e^x + 2 = h'(x) + x^2$

donc h est solution.

Proposer une autre solution particulière, par exemple telle que $y(0) = -2$.

$$a(x) = x^2 + 2x + 5e^x \quad \Rightarrow a(0) = 0 + 0 + 5e^0 = 5$$

$$b(x) = x^2 + 2x - 2e^x \Rightarrow \quad b(0) = -2$$