Savoir Fc.2 - Théorème des valeurs intermédiaires

Entraînement 1

1. On considère la fonction f dont on donne le tableau de variation sur l'intervalle $[-1; 4]$.

x	-1		1		4
$f(x)$	$\sqrt{5}-1$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-1

Montrer qu'il existe une unique valeur α dans l'intervalle $[-1; 4]$ telle que$f(\alpha) = 1$.

2. On considère la fonction g définie sur $[–2 ; 2]$ par : $g(x) = 3 + 3(x – 2)\, e^{-2x + 3}$

a. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution sur $[1; 3]$.
b. Déterminer une valeur approchée à 10^{-3} près de cette solution.

Entraînement 2

1. On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = x^3 - 3x^2 + 7$.
On donne ci-contre son tableau de variation.

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$h(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Montrer que l'équation $h(x) = 4$ admet deux solutions sur l'intervalle $[-1\ ;\ 2]$.

2. On considère la fonction C définie sur $[-1 ; 1]$ par : $C(x) = 2x^2 \ln(x+4) - 1$

a. Montrer que l'on a :

$$C'(x) = 2x\left(2\ln(x+4) + \frac{2x}{x+4}\right)$$

b. On admet que l'expression $2\ln(x+4) + \frac{2x}{x+4}$ est positive sur $[-1; 1]$.
Montrer qu'il existe une unique valeur α dans l'intervalle $[-1; 0]$ telle que $C(\alpha) = 1$.

d. Déterminer une valeur approchée à 10^{-2} près de α.

Entraînement 3

1. On considère la fonction F définie sur $[0; +\infty[$ par : $F(x) = 2x\sqrt{x}$.
F est dérivable sur $]0; +\infty[$, et sa dérivée est $F'(x) = 3\sqrt{x}$.

Montrer qu'il existe une unique solution à l'équation $F(x) = 9$.

2. On considère la fonction B définie sur $[1 ; 3]$ par : $B(x) = -2(x – 1)^2\, e^{0,5x} + 5$

a. Montrer qu'il existe une valeur x_0 dans l'intervalle $[1 ; 3]$ telle que $B(x) = 0$.
b. Déterminer une valeur approchée à 10^{-2} près de x_0.

Entraînement 4

1. On considère la fonction f définie par : $f(x) = 2\sqrt{35 - x^2 - 2x} - 3$.

On donne ci-dessous son tableau de variation sur l'intervalle $[-3\,;5]$.

x	-3		-1		5
$f(x)$	$8\sqrt{2} - 3$	↗	9	↘	-3

Montrer que l'équation $f(x) = 7$ n'a qu'une seule solution x_0 sur l'intervalle $[-3\,;5]$.

2. On considère la fonction g définie sur [0 ; 1] par : $g(x) = xe^x$.

a. Montrer qu'il existe une unique valeur β telle que $g(\beta) = 1$ dans l'intervalle $[0; 1]$.
b. Déterminer une valeur approchée à 10^{-2} près β.

Corrections Savoir Fc.2

Corrigé Entraînement 1

1. $\sqrt{5} - 1 \simeq 1{,}23$ donc $f(-1) > 1$. Il n'y a pas de solution sur l'intervalle $[-1; 1]$.
f est **continue et strictement décroissante** sur $[1; 4]$, avec $f(1) > 1$ et $f(4) < 1$
(autre rédaction possible : $1 \in [f(4); f(1)]$ *ou* $f(4) < 1 < f(1)$*)*
D'après le **théorème des valeurs intermédiaires**, il existe donc une seule valeur α telle que $f(\alpha) = 1$ dans l'intervalle [1 ; 4].

2. On calcule : $g'(x) = 3e^{-2x+3} + 3(x-2)(-2)e^{-2x+3} = (15 - 6x)e^{-2x+3}$.
Sur $[-2; 2]$, $15 - 6x$ est positif et l'exponentielle aussi donc g est croissante :

x	-2		2
$g(x)$	***≃−13 157***	↗	***3***

a. La fonction g est continue et strictement croissante sur [−2 ; 2] avec *f(−2) < 0* et *f(2) > 0*
D'après le TVi, l'équation *g(x) = 0* admet une unique solution sur l'intervalle [−2; 2].

b. A la calculatrice, on trouve : *g(1,3125) < 0 < g(1,3126)*
La solution α est donc telle que : **α ≃ 1,313**.

Corrigé Entraînement 2

1) On a :

x	-1		0		2
$h(x)$	*3*	↗	*7*	↘	*3*

h est **continue** **et strictement croissante** sur $[-1; 0]$, avec $h(-1) < 4 < h(0)$.
D'après le **théorème des valeurs intermédiaires**, l'équation $h(x) = 4$ admet une **unique solution** α sur l'intervalle [-1 ; 0].

De même, h est **continue et strictement décroissante** sur $[0; 2]$, avec $h(2) < 4 < h(0)$.
D'après le **théorème des valeurs intermédiaires**, l'équation $h(x) = 4$ admet une **unique solution** β sur l'intervalle [0 ; 2].
Donc l'équation $h(x) = 4$ admet bien deux solutions sur l'intervalle $[-1\ ;\ 2]$.

2)

x	-1		0		1
$C(x)$	**$\simeq 1{,}2$**	↘	**-1**	↗	**$\simeq 2{,}2$**

a. La fonction C est continue et strictement décroissante sur [−1 ; 0] avec $C(-1) > 1$ et $C(0) < 1$
D'après le TVi, il exsite une seule valeur α telle que $C(\alpha) = 1$ sur l'intervalle [−1; 0].

b. A la calculatrice, on trouve : $C(-0{,}947) > 1 > C(-0{,}946)$.
On a donc **$\alpha \simeq -0{,}95$**

Corrigé Entraînement 3

1) On calcule par exemple $F(4) = 16$ qui est supérieur à 9 et on se place donc sur l'intervalle $[0; 4]$:
F est **continue et strictement croissante** sur $[0; 4]$, avec $F(0) < 9 < F(4)$
D'après le **théorème des valeurs intermédiaires**, l'équation $F(x) = 9$ admet une **unique solution** x_0 sur l'intervalle $[0; 4]$.
Puisque on a $F(x) > 9$ pour $x > 4$,
il n'y a **pas d'autre solution.**

Par exemple

x	0		4		$+\infty$
$F'(x)$		$+$			
$F(x)$	**0**	↗	**16**	↗	

2) a. On calcule :

$$B'(x) = (-2(2)(x-1) - 2(x-1)^2)e^{0,5x} = (-4x + 4 - 2x^2 + 4x - 2)e^{0,5x}$$
$$= (2 - 2x^2)e^{0,5x} = 2(1 - x^2)e^{0,5x}$$

Sur $[1; 3]$, $1 - x^2$ est négatif et l'exponentielle est positive donc B' est négative et B est décroissante :

x	1		3
$B(x)$	**5**	↘	**$\simeq -13$**

La fonction B est continue et strictement décroissante sur [1 ; 3] avec $B(1) > 0$ et $B(3) < 0$
D'après le TVi, il existe une unique valeur x_0 telle que $B(x_0) = 0$ sur l'intervalle [1; 3].

b. A la calculatrice, on trouve : $B(1{,}945) > 0 > B(1{,}946)$
On a donc **$x_0 \simeq 1{,}95$**

Corrigé Entraînement 4

1) $f(-3) \simeq 8{,}3 > 7$ et $f(-1) > 7$ donc il n'y a pas de solution sur $[-3, -1]$
La fonction f est <u>continue</u> et <u>strictement décroissante</u> sur $[-1\ ; 5]$ avec $f(5) < 7 < f(-1)$
D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 7$ admet une unique solution x_0 sur l'intervalle $[-1\ ;\ 5]$.

2) a. On a $g'(x) = (1 + x)e^x$. Dans $[0; 1]$, $1 + x$ et e^x sont positifs donc g' aussi.
g est donc strictement croissante sur $[0; 1]$ avec $g(0) = 0$ et $g(1) = e$.
Elle est d'autre part continue, et on a : $g(0) < 1 < g(1)$.
D'après le TVI, il existe donc une unique valeur β dans $[0; 1]$ telle que $g(\beta) = 1$.

b. On trouve : $g(0{,}567) < 1 < g(0{,}568)$ donc $\beta \simeq 0{,}57$.