

Savoir Fi. 3 : Propriétés des intégrales

Exercice 10 : Utilisations de la linéarité

1) Soient f et g deux fonctions continues sur $[-3; 4]$ telles que :

$$I = \int_{-3}^1 f(t) dt = -2 \quad J = \int_1^4 f(t) dt = 3 \quad K = \int_{-3}^4 g(t) dt = -1 \quad \text{et} \quad L = \int_1^4 g(t) dt = 1$$

Donner la valeur des intégrales suivantes :

$$\text{a) } \int_{-3}^4 f(t) dt \quad \text{b) } \int_{-3}^1 g(t) dt \quad \text{c) } \int_1^4 (f(t) + g(t)) dt \quad \text{d) } \int_{-3}^1 (f - g)(t) dt \quad \text{e) } \int_{-3}^4 (4g - 3f)(t) dt$$

2) Réduire, sans chercher à calculer :

$$\text{a) } \int_0^1 (e^{x^2} - 1) dx + \int_0^1 dx + \int_1^2 e^{x^2} dx \quad \text{b) } \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx - \int_0^{-2} \frac{1}{t^2+1} dt \quad \text{c) } \sum_{k=1}^{100} \int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx$$

3) On donne $I = \int_0^\pi \cos^2(t) dt$ et $J = \int_0^\pi \sin^2(t) dt$

- a. Calculer $I + J$ et $I - J$ b. En déduire les valeurs de I et de J

Plus loin...

4) On donne :

$$I = \int_0^1 \frac{e^x + 1}{e^x + 2} dx \quad \text{et} \quad J = \int_0^1 \frac{1}{e^x + 2} dx$$

Calculer $I + J$ et $I - J$ et en déduire les valeurs de I et de J

Exercice 11 : Signe, comparaison et encadrements d'intégrales

1) Donner le signe des intégrales ci-dessous, sans chercher à les calculer.

$$\text{a) } \int_{-1}^1 e^{-x^3} dx \quad \text{b) } \int_2^e (1-t) \ln t dt \quad \text{c) } \int_0^2 (x^2 - 2x - 3) dx \quad \text{d) } \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos \theta - 1) d\theta$$

2) a. Pour $0 \leq x \leq 1$, montrer que $x^2 \leq x$. En déduire que $\int_0^1 e^{-x^2} dx \geq \int_0^1 e^{-x} dx$

b. On admet que, pour tout $t \in [0; 1]$, on a $t^2 \geq t^3$.

Comparer, sans les calculer, les intégrales $I = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt$ et $J = \int_0^1 \frac{1}{1+t^3} dt$

3) On considère $I = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt$

a. Démontrer que, pour tout $t \geq 0$, $1 - t^2 \leq \frac{1}{1+t^2} \leq 1$

b. En déduire un encadrement de l'intégrale I

